Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de Solução Nodal para alguns Problemas Elípticos

por

Geovany Fernandes Patricio

sob orientação do

Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

*Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

P314e Patrício, Geovany Fernandes.
Existência de solução nodal para alguns problemas elípticos / Geovany Fernandes Patrício. ï Campina Grande, 2018.
150 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) ï Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.
"Orientação: Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira".
Referências.

1. Problemas Elípticos. 2. Solução Nodal. 3. Métodos Variacionais. I. Pereira, Denilson da Silva. II. Título.

CDU 517.956.2(043)

Existência de Solução Nodal para alguns Problemas Elípticos

por

Geovany Fernandes Patricio

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Luciana R. Freitas

Prof. Dr^{a}. Luciana Rose de Freitas-UEPB

Claudianor O. Alves

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves-UFCG

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho-UFCG

Denilson da Silva Pereira.

Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Março/2018

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus pois sem ele nada disso seria possível em seguida a minha querida e estimada **Mãe Maria das Graças** que contribui diretamente em meu caminho acadêmico, com sua perseverança e motivação para que eu pudesse subir mais um degrau dessa infinita e não enumerável escada do conhecimento.

Durante a graduação e mestrado conheci varias pessoas dentre colegas de curso, funcionários da instituição UFCG e professores. Todos contribuíram, uns de maneira direta e outros de maneira indireta, para minha formação acadêmica. Em especial a minha namorada, amiga e companheira **Bruna Emanuelly**, sem ela "Isso ainda seria possível" (Brincadeira!), na verdade ela contribuiu e ainda contribui bastante na minha formação acadêmica, que possamos estar sempre perto um do outro em várias conquistas de nossa vida.

Lembro aqui de **Juarez Cavalcante de Brito Junior** querido e estimado amigo, companheiro de tantas horas que nos deixou saudade com sua partida precoce, o qual contribuiu efetivamente para minha formação acadêmica. Lembrar do amigo e **Prof. Dr. Braulio Maia Junior** que também nos deixou precocemente.

Aos meus colegas de mestrado e demais amigos bem como: Arthur Cavalcante, Laise Dias, Thiago Felipe, Felipe Barbosa, Hydayane Nunes, O Ilustre Ismael Sandro, ao Excêntrico Renato de Melo, Pedro Caio, eu,.... Ao Grupo Pet-Matemática–UFCG, em ESPECIAL ao professor **Dr. Daniel Cordeiro** que foi e está sendo crucial na minha formação acadêmica. Peço desculpa aos demais amigos, colegas e professores por não citá-los nesse pequeno espaço, saibam que todos têm espaço reservado em minhas lembranças e em meu coração.

Não podia esquecer da excelentíssima secretária da Pós-Graduação senhorita **Andrezza Freitas** que nos contagia com sua alegria e sorriso gigantesco (Uma amiga e companheira de ressacas ("BRAVAS"!!!)). A minha amiga **Aninha** que nos fornece um ambiente agradável para que possamos estudar. Lembro aqui de **Dalva** por suas divertidas peripécias espontâneas.

Agradecer aos professores: Claudianor Oliveira, Angelo Roncalli, Aparecido Jesuíno, Diogo Diniz os quais me deram uma formação sólida por meio das disciplinas cursadas no mestrado. Agradecer a Profª. Drª. Luciana Rose de Freitas (UEPB) por disponibilizar seu precioso tempo para avaliar nosso trabalho.

Por fim, mas não menos importante, agradecer ao **Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira** que aceitou esse desafio de me orientar. Não há palavras para descrever o conhecimento que foi adquirido em sua orientação, "deixo que essa dissertação fale por si só".

”As montanhas da vida não existem apenas para que você chegue ao topo, mas para que você aprenda o valor da escalada”

Autor desconhecido.

Dedicatória

A Minha mãe Maria das Graças.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de solução nodal para alguns problemas elípticos em domínios limitados e ilimitados. Tratamos os casos subcrítico, crítico, crítico exponencial (domínio limitado) e subcrítico exponencial. As principais ferramentas utilizadas são Métodos Variacionais, Lema de Deformação e Conjuntos Invariantes por Fluxo Decrescente.

Palavras-chave: Problemas Elípticos, Solução Nodal, Métodos Variacionais.

Abstract

In this work we study the existence of nodal solution for some Elliptic problems in bounded and unbounded domains. We deal with cases subcritical, critical, exponential critical and exponential subcritical growth. The main tools used are Variational methods, deformation Lemma and invariant sets of the descending flow.

Keywords: Elliptic problems, Nodal solution, Variational Methods.

Sumário

Notação e terminologia

- Se f é uma função integrável, denotaremos por $\int_\Omega f$ a seguinte integral $\int_\Omega f(x)\,dx$;

- Denotaremos por

$$sgn(s) = \begin{cases} 1\ , & s > 0 \\ 0\ , & s = 0 \\ -1\ , & s < 0; \end{cases}$$

- Função característica

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1\ , & x \in \Omega \\ 0\ , & \text{caso contrário}; \end{cases}$$

- 2^* é o expoente crítico de Sobolev definido por

$$2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2}\ , & N \geq 3 \\ +\infty\ , & N = 1, 2; \end{cases}$$

- $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \min\{u, 0\}$ denotam a parte positiva e negativa de uma função u, respectivamente;

- Se $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, então denotaremos $|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;

- $g = o(s)$ significa que $\lim_{s \to 0} \dfrac{g(s)}{s} = 0$;
- $o_n(1)$: denota uma sequência de números reais convergindo para 0 (zero) quando $n \to +\infty$;
- $\to$, $\rightharpoonup$: convergência forte e convergência fraca, respectivamente;
- q.t.p: significa quase todo ponto, ou seja, a menos de um conjunto de medida nula;
- $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$: espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\int_K |u|^p < \infty$ para todo conjunto compacto $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- $L^\infty(\Omega)$: o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que existe $C > 0$ com $|u(x)| \leq C$ q.t.p em Ω;
- Se $u \in L^\infty(\Omega)$, então denotamos a norma de u em $L^\infty(\Omega)$ por $|u|_\infty = \inf\{C > 0; |u(x)| \leq C \text{ q.t.p em } \Omega\}$;
- Sejam X um espaço vetorial, $c \in \mathbb{R}$ e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional, então denotamos por $I^c = \{u \in X : I(u) \leq c\}$.

Introdução

Soluções nodais (isto é, soluções que mudam de sinal) de equações elípticas não lineares têm atraído muita atenção nas últimas duas décadas. Uma das razões é que as soluções nodais surgem naturalmente de modelos matemáticos, físicos e em biologia (Refs.[13], [14]). Além disso, muitas equações elípticas decorrentes da física têm soluções nodais como estado limite, assim como no caso de problemas de autovalor elíptico em domínio limitado. Outra razão é que existem estruturas mais ricas quando se estuda solução nodal em relação ao estudo de soluções positivas e negativas para equações elípticas genéricas não lineares e lineares. Por exemplo, apenas as autofunções associadas ao primeiro autovalor de um operador elíptico de segunda ordem em um domínio limitado com a condição de fronteira de Dirichlet possuem um sinal definido e todas as outras autofunções são nodais. Em comparação com soluções positivas e negativas, as soluções nodais possuem propriedades qualitativas mais complicadas, como o número e a forma dos domínios nodais e a medida dos conjuntos nodais. Portanto, soluções nodais são matematicamente desafios interessantes. Existe uma vasta literatura clássica para o estudo da existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos não lineares com condições de fronteira. A investigação de soluções nodais é uma extensão natural deste campo e nos referimos a ([7], [12], [28]) e as referências neles contidas. Muitos problemas não lineares em física, engenharia, biologia e ciências sociais podem ser reduzidos ao problema de encontrar pontos críticos (mínimos, máximos e pontos minimax) de funções assumindo valores reais sobre algum espaço adequado. A primeira classe de pontos críticos a serem estudados foi mínimo e máximo e grande parte da atividade no cálculo variacional tem sido dedicada a esses pontos. Um problema mais difícil é determinar pontos críticos que não são máximos nem mínimos. Até agora, podemos dizer, até certo ponto [que existe um método padrão para encontrar tais pontos críticos e esses métodos são chamados de métodos variacionais e topológicos]. No entanto, ambos dão respostas sobre a existência ou multiplicidade de pontos críticos de um funcional. Geralmente, eles não fornecem muitas outras informações adicionais sobre os pontos críticos, como o sinal de soluções, exceto em alguns casos especiais. Há um interesse crescente nos últimos anos em desenvolver uma teoria pela qual se pode obter muito mais informações sobre pontos críticos. Na verdade, ao longo dos últimos trinta a quarenta anos, vários métodos foram desenvolvidos no estudo de soluções nodais de equações diferenciais parciais elípticas não lineares. O estudo de soluções nodais estimulou o desenvolvimento de técnicas novas e sofisticadas no cálculo variacional e na teoria dos pontos críticos. No entanto, até onde sabemos há apenas um livro sobre existência de soluções nodais Wenming Zou [35].

A proposta deste trabalho é realizar um estudo de existência de solução nodal, ou seja, soluções que mudam de sinal, para alguns problemas elípticos. Mais especificamente:

No capítulo 1 estudamos com base no artigo de Bartsch, Weth e Willem [5] o problema **subcrítico** de Sobolev

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u)\ , & \Omega \\ u = 0\ , & \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo algumas condições.

No capítulo 2 estudamos com base no artigo de Cerami, Solimini e Struwe [9] o problema **crítico**

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = u\,|u|^{2^*-2}\ , & \Omega \\ u = 0\ , & \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $\lambda \in (0, \lambda_1)$.

No capitulo 3, com base no artigo de Alves e Pereira [1], foi feito um estudo do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u)\ , & \Omega \\ u = 0\ , & \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Mais precisamente a não-linearidade f tem **crescimento crítico exponencial**.

Baseado no artigo de Zhaoli Liu e Jingxian Sun [21], no capítulo 4 fizemos um estudo de conjuntos invariantes por fluxo decrescente (c.i.f.d) destacando os principais resultados que utilizamos em nossa dissertação.

No capítulo 5 aplicamos o que foi feito no capítulo 4 para o estudo da equação superlinear de Schrödinger

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(u)\ , & \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $a \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função com **crescimento subcrítico** de Sobolev.

Capítulo 1

Problema subcrítico

Para este estudo utilizamos como texto base o artigo de Bartsch, Weth e Willem [5].

Mostramos a existência de soluções nodais para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u)\ , & \Omega \\ u = 0\ , & \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo:

(f_1) $f(t) = o(|t|)$, $t \to 0$;

(f_2) $\displaystyle\limsup_{|t|\to+\infty} \frac{|f(t)|}{|t|^{p-1}} < \infty$ para algum $p \in (2, 2^*)$;

(f_3) (Ambrosetti-Rabinowitz). Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(s) < sf(s),\ \forall\ s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

onde $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)dt$;

(f_4) A função $s \longmapsto \dfrac{f(s)}{|s|}$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Observação 1.1 *Uma não linearidade modelo é a seguinte*

$$f(t) = |t|^{p-2}t,$$

onde $2 < p < 2^*$.

O espaço em questão é o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ munido da norma

$$||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

O funcional associado ao problema 1.1 é dado por:

$$\begin{array}{rll} I: & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto I(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u) \end{array}$$

Pelo estudo feito no Apêndice A tem-se que I é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$I'(u) \cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(u)v \ , \ \forall\ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Uma solução (fraca) para o problema (1.1) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f(u)v \ , \ \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

1.1 Variedade de Nehari

Definimos a **Variedade de Nehari** para o funcional I como sendo o seguinte conjunto

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} \mid I'(u) \cdot u = 0\}.$$

Observação 1.2 *Nem sempre $\mathcal{N}$ é uma variedade. Essa característica depende do funcional em questão, porém nosso estudo independe de $\mathcal{N}$ ser ou não uma variedade.*

Por definição da **Variedade de Nehari** tem-se que toda solução de (1.1) pertence a $\mathcal{N}$. Com isso reduzimos o ambiente de soluções do problema (1.1) de $H_0^1(\Omega)$ e passamos nossa atenção ao conjunto $\mathcal{N}$.

Estamos interessados em solução para o problema (1.1) que muda de sinal, isto é, uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u^{\pm} \neq 0$ e u satisfaz a relação (1.2). Assim é natural considerar o conjunto

$$\mathcal{M} = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u^{\pm} \neq 0 \ \text{ e } \ I'(u^{\pm}) \cdot u^{\pm} = 0\}$$

e mostrar que existe $u_0 \in \mathcal{M}$ tal que

$$I(u_0) = \beta := \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u) \quad \text{e} \quad I'(u_0) = 0.$$

A proposição a seguir mostra que toda solução nodal de (1.1) pertence ao conjunto $\mathcal{M}$.

Proposição 1.3 *Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução nodal de (1.1), então $u \in \mathcal{M}$.*

Demonstração.

Sabemos que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $u^{\pm} \in H_0^1(\Omega)$ (ver Apêndice E). Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ solução nodal de (1.1) assim $u^{\pm} \neq 0$ e $I'(u) \cdot v = 0 \ \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$ em particular se $v = u^+$ tem-se que

$$\begin{aligned} I'(u) \cdot u^+ = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_\Omega \nabla u \nabla u^+ = \int_\Omega f(u) u^+ \\ &\Leftrightarrow \quad \int_\Omega \nabla u [\nabla u \chi_{[u>0]}] = \int_\Omega f(u) u^+ \\ &\Leftrightarrow \quad \int_\Omega |\nabla u^+|^2 = \int_\Omega f(u^+ + u^-) u^+ \\ &\Leftrightarrow \quad \int_\Omega |\nabla u^+|^2 = \int_\Omega f(u^+) u^+, \end{aligned}$$

isto é, $I'(u^+) \cdot u^+ = 0$. De maneira análoga mostra-se que $I'(u^-) \cdot u^- = 0$. Portanto $u \in \mathcal{M}$. $\blacksquare$

1.2 Propriedades da Variedade de Nehari

Agora mostraremos uma serie de resultados envolvendo a Variedade de Nehari e o Conjunto $\mathcal{M}$, as quais serão cruciais para mostrar a existência de uma solução nodal para o problema (1.1).

Lema 1.4 *Existe $r > 0$ tal que para $u \in \mathcal{N}$ tem-se*

$$||u|| \geq r > 0.$$

Demonstração.

De fato, usando imersão contínua de Sobolev (ver Apêndice E) e o crescimento da função f (ver Apêndice A Lema A.4), para cada $u \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} ||u||^2 &= \int_\Omega f(u)u \\ &\leq \int_\Omega [\varepsilon|u| + C|u|^{p-1}]|u| \\ &= \varepsilon|u|_2^2 + C|u|_p^p \\ &\leq \tilde{\varepsilon}||u||^2 + \tilde{C}||u||^p. \end{aligned}$$

Logo, considerando $\tilde{\varepsilon} \in (0,1)$, temos

$$0 < \left[\frac{(1-\tilde{\varepsilon})}{\tilde{C}}\right]^{\frac{1}{p-2}} \leq ||u||$$

■

Corolário 1.5 *Existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |u^{\pm}|^p \geq \delta > 0 \ , \ \forall \ u \in \mathcal{M}.$$

Proposição 1.6 *Se $u \in \mathcal{N}$, então*

$$\max_{t \geq 0} I(tu) = I(u).$$

Demonstração.

Para cada $u \in \mathcal{N}$ considere a aplicação

$$\begin{aligned} h: \ [0,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h(t) = I(tu). \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, usando imersão contínua de Sobolev (ver Apêndice E) e o Lema A.4 (ver Apêndice A), obtemos

$$\begin{aligned} I(tu) &= \frac{t^2}{2}||u||^2 - \int_\Omega F(tu) \\ &\geq \frac{t^2}{2}||u||^2 - \tilde{\varepsilon}t^2||u||^2 - \tilde{C}t^p||u||^p \\ &= t^2\left(||u||^2\left[\frac{1}{2} - \tilde{\varepsilon}\right]\right) - \tilde{C}t^p||u||^p \end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = \dfrac{C}{p}\ K^p$, $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon K^2}{2}$ e K a constante de Imersão. Considerando $\tilde{\varepsilon} \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ e para t se aproximando de zero pela direita tem-se $I(tu) > 0$. Além disso, pela Observação A.3 feita no Apêndice A, para $t \to +\infty$ tem-se $I(tu) < 0$. Sendo h contínua, então h atinge um máximo, isto é, existe $t_u > 0$ tal que

$$I(t_u u) = h(t_u) = \max_{t \geq 0} I(tu).$$

Para $t > 0$ temos que

$$h'(t) = \int_\Omega \left[\frac{f(u)}{u} - \frac{f(tu)}{tu}\right] t\ u^2.$$

Consequentemente $h'(t_u) = 0$, ou seja, $I'(t_u u) \cdot u = 0$. Daí, temos que

$$||u||^2 = \int_\Omega \left[\frac{f(t_u u)}{t_u u}\right] u^2. \tag{1.3}$$

Por outro lado, por $u \in \mathcal{N}$, temos

$$||u||^2 = \int_\Omega \frac{f(u)}{u} u^2. \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4), e considerando $u > 0$, obtemos

$$\int_{[u>0]} \left[\frac{f(t_u u)}{t_u u} - \frac{f(u)}{u} \right] u^2 = 0.$$

Supondo que $t_u \neq 1$ e usando (f_4) chegamos a um absurdo. O caso $[u < 0]$ é análogo. Portanto $t_u = 1$ e com isso

$$\max_{t \geq 0} I(tu) = I(u).$$

■

A demonstração da próxima proposição é análoga à anterior apenas com pequenas modificações.

Proposição 1.7 *Para cada $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$ existe um único $t_u \in (0, +\infty)$ tal que*

$$t_u u \in \mathcal{N}.$$

Corolário 1.8 *Dado $u \in H_0^1(\Omega)$ com $u^{\pm} \neq 0$, existem únicos $s = s(u) > 0$ e $t = t(u) > 0$ tais que*

$$su^+ + tu^- \in \mathcal{M}.$$

1.3 Existência de um minimizante

Teorema 1.9 *O número $\beta = \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u)$ é atingido, isto é, existe $w \in \mathcal{M}$ tal que $I(w) = \beta$.*

Demonstração.

Seja $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ uma sequência minimizante para o funcional I em $\mathcal{M}$, ou seja,

$$I(u_n) = \beta + o_n(1).$$

Agora note que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $I'(u_n) \cdot u_n = 0$, logo para $\theta > 2$ e da condição (f_3) tem-se

$$\begin{aligned} o_n + \beta &= I(u_n) - \frac{1}{\theta} I'(u_n) \cdot u_n \\ &= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_\Omega F(u_n) - \frac{1}{\theta}||u_n||^2 + \frac{1}{\theta}\int_\Omega f(u_n)u_n \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||u_n||^2 + \frac{1}{\theta}\int_\Omega [f(u_n)u_n - \theta F(u_n)] \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||u_n||^2, \end{aligned}$$

mostrando que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo, a menos de subsequência, existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e consequentemente $u_n^\pm \rightharpoonup u_0^\pm$ em $H_0^1(\Omega)$. Sendo Ω limitado, pela Imersão de Rellich (ver Apêndice E), temos

$$u_n^\pm \longrightarrow u_0^\pm \text{ em } L^p(\Omega) \,,\ \forall\, p \in [1, 2^*).$$

Daí,

$$\int_\Omega |u_n^\pm|^p \longrightarrow \int_\Omega |u_0^\pm|^p \text{ em } \mathbb{R} \,,\ \forall\, p \in [1, 2^*).$$

Assim, pelo Corolário 1.5, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u_0^\pm|^p \geq \delta > 0.$$

Portanto $u_0^\pm \neq 0$ e com isso fica mostrado que o limite fraco de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma função nodal. Agora pelo Corolário 1.8 existem únicos $s, t > 0$ tais que

$$w = su_0^+ + tu_0^- \in \mathcal{M}.$$

Afirmação $I(w) = \beta$.

De fato, primeiramente observe que se $u_n^\pm \rightharpoonup u_0^\pm$ em $H_0^1(\Omega)$ então

$$||u_0^\pm|| \leq \liminf_n ||u_n^\pm||. \tag{1.5}$$

Além disso, usando Lema A.4 (ver Apêndice A), Imersão de Rellich (ver Apêndice E) e o Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lebesgue (ver Apêndice D Teorema D.2), tem-se que

$$\int_\Omega F(su_n^+) \longrightarrow \int_\Omega F(su_0^+) \ \text{ em } \ \mathbb{R} \tag{1.6}$$

$$\int_\Omega F(tu_n^-) \longrightarrow \int_\Omega F(tu_0^-) \ \text{ em } \ \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Temos ainda, pela Proposição 1.6, que se $u_n^\pm \in \mathcal{N}$ então

$$I(u_n^+) = \max_{r\geq 0} I(ru_n^+) \geq I(su_n^+) \tag{1.8}$$

$$I(u_n^-) = \max_{r\geq 0} I(ru_n^-) \geq I(tu_n^-) \tag{1.9}$$

Portanto, por $w \in \mathcal{M}$, (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) e (1.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\beta \leq I(w) &= \frac{1}{2}||su_0^+||^2 + \frac{1}{2}||tu_0^-||^2 - \int_\Omega F(su_0^+ + tu_0^-) \\
&= \frac{1}{2}||su_0^+||^2 - \int_\Omega F(su_0^+) + \frac{1}{2}||tu_0^-||^2 - \int_\Omega F(tu_0^-) \\
&\leq \liminf_n \left(\frac{1}{2}||su_n^+||^2 - \int_\Omega F(su_n^+)\right) + \liminf_n \left(\frac{1}{2}||tu_n^-||^2 - \int_\Omega F(tu_n^-)\right) \\
&= \liminf_n [I(su_n^+) + I(tu_n^-)] \\
&\leq \liminf_n [I(u_n^+) + I(u_n^-)] = \liminf_n I(u_n) = \beta.
\end{aligned}$$

E assim concluímos que $I(w) = \beta$. ■

Observação 1.10 *Se considerarmos* $D = [a,b] \times [a,b]$, *onde* $0 < a < 1 < b$, *e definir a aplicação*

$$\begin{aligned}
g: \quad D \quad &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\
(s_1, s_2) \quad &\longmapsto g(s_1,s_2) = s_1 w^+ + s_2 w^-
\end{aligned}$$

tem-se

$$\beta_0 = \max_{(s_1,s_2)\in\partial D} I(g(s_1,s_2)) < \beta. \tag{1.10}$$

Basta ver pela Proposição 1.6 que

$$I(s_1w^+ + s_2w^-) < I(w^+) + I(w^-) = \beta. \tag{1.11}$$

para $(s_1, s_2) \in D\backslash\{(1,1)\}$.

1.4 Caracterização dos pontos minimizante para o funcional I em $\mathcal{M}$

O teorema a seguir é crucial para mostrar a existência de solução nodal para (1.1). Esse resultado é válido não somente em domínios limitados do $\mathbb{R}^N$ mas também em domínios ilimitados. De início precisaremos de um lema auxiliar.

Lema 1.11
Sejam $S = \{tw^+ + sw^- : t, s \in [a,b]\}$ *e* $P = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \geq 0\}$. *Então*

$$d_0 = dist(S, \Lambda) > 0$$

onde $\Lambda = P \cup (-P)$ *e* $0 < a < 1 < b$.

Demonstração.

De fato, caso contrário existem sequências $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ e $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ tais que

$$||w_n - v_n|| \longrightarrow 0 \ , \ \text{ quando } \ n \to +\infty. \tag{1.12}$$

Note que $w_n = t_nw^+ + s_nw^-$ com $s_n, t_n \in [a,b]$. Assim podemos escolher subsequências $\{s_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}, \{t_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, respectivamente, de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

$$s_{n_j} \to s_0 \ \text{ e } \ t_{n_j} \to t_0 \ \text{ quando } \ j \to +\infty$$

para algum $s_0, t_0 \in [a,b]$. Com isso, quando $j \to +\infty$, tem-se

$$w_n(x) = t_{n_j}w^+(x) + s_{n_j}w^-(x) \longrightarrow t_0w+(x) + s_0w^-(x) \ , \ \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

Por outro lado, de (1.12) e pelo fato de que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, segue que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Com isso temos que $v_n(x) \to v_0(x)$ q.t.p em Ω quando $n \to +\infty$. E pela unicidade de limite, a menos de subsequência, concluímos que

$$v_n(x) \longrightarrow t_0 w^+(x) + s_0 w^-(x)\ , \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $v_n(x) \geq 0\ ,\ \forall\, x \in \Omega$, chegamos a uma contradição, pois $t_0 w^+ + s_0 w^-$ muda de sinal. ■

Teorema 1.12 *Se w é um minimizante para I em $\mathcal{M}$, então w é ponto crítico do funcional I. Consequentemente w é uma solução nodal do problema (1.1).*

Demonstração.

Seja $I(w) = \inf\limits_{u\in\mathcal{M}} I(u) = \beta$. Suponhamos, por absurdo, que w não seja ponto crítico do funcional I. Sendo I de classe C^1 existem $\delta, \lambda > 0$ tais que

$$\text{para } \ ||v - w|| \leq \delta \ \text{ tem-se } \ ||I'(v)|| \geq \lambda.$$

Note que, diminuindo $\delta > 0$, se necessário, podemos supor $\delta < \dfrac{d_0}{2}$ ($d_0 > 0$ aparece no Lema 1.11) e ainda assim teremos

$$||I'(v)|| \geq \lambda \ \text{ para } \ ||v - w|| \leq \delta.$$

Por (1.10) temos que $\beta - \beta_0 > 0$, com isso defina

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{\beta - \beta_0}{4}, \frac{\lambda\delta}{8}\right\},$$

e consideremos $S = B(w, \delta)$ logo

$$\forall\, u \in I^{-1}([\beta - 2\varepsilon, \beta + 2\varepsilon]) \cap S \ \text{ tem-se } \ ||I'(u)|| \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Pelo Lema da Deformação (ver Willem [34]), temos que existe um homeomorfismo

$$\eta \in C([0,1] \times H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$$

tal que

(a) $\eta(t,u) = u$, $\forall\, u \notin I^{-1}([\beta - 2\varepsilon, \beta + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$ e $\forall\, t \in [0,1]$;

(b) $\eta(1, I^{\beta+\varepsilon} \cap S_{2\delta}) \subset I^{\beta-\varepsilon}$;

(c) $||\eta(1,u) - u|| \leq \delta$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$.

Agora consideremos a aplicação g definida na Observação 1.10. Dado $(s_1, s_2) \in D$ segue de (1.11) que $I(g((s_1,s_2))) \leq \beta < \beta + \varepsilon$, então $g((s_1,s_2)) \in I^{\beta+\varepsilon}$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
||g(s_1,s_2) - w|| &= ||w^+(s_1 - 1) + w^-(s_2 - 1)|| \\
&= |s_1 - 1|\, ||w^+|| + |s_2 - 1|\, ||w^-|| \\
&\leq ||w||\, 2(b-a) \leq 2\delta \ \text{ para } \ a \approx 1^- \ \text{ e } \ b \approx 1^+
\end{aligned}
$$

mostrando que $g((s_1,s_2)) \in S_{2\delta}$. Com isso $g((s_1,s_2)) \in I^{\beta+\varepsilon} \cap S_\delta$. Pelo item (b) segue que $\eta(1, g((s_1,s_2))) \in I^{\beta-\varepsilon}$, isto é, $I(\eta(1, g((s_1,s_2)))) \leq \beta - \varepsilon$ mostrando que

$$
\max_{(s_1,s_2)\in D} I(\eta(1, g(s_1,s_2))) < \beta. \tag{1.13}
$$

Faremos a afirmação abaixo que será provada logo a seguir.

Afirmação: $\eta(1, g(D)) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$.

Segue da afirmação que existe $(\overline{s_1}, \overline{s_2}) \in D$ tal que

$$
\eta(1, g(\overline{s_1}, \overline{s_2})) \in \mathcal{M}
$$

com isso por (1.13)

$$
\beta \leq I(\eta(1, g(\overline{s_1}, \overline{s_2}))) \leq \max_{(s_1,s_2)\in D} I(\eta(1, g(s_1,s_2))) < \beta,
$$

o que é um absurdo. Para concluir a demonstração do teorema basta provar a última afirmação.

Prova da afirmação

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} h: \quad D \quad & \longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ (s_1, s_2) \quad & \longmapsto h(s_1, s_2) = \eta(1, g(s_1, s_2)). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $h(s_0, t_0) \in \mathcal{M}$ para algum $(s_0, t_0) \in D$.

Seja $z \in \Lambda = P \cup (-P)$, usando o item (c) e o Lema 1.11, temos que

$$\begin{aligned} ||\eta(1, g(s_1, s_2)) - z|| \quad & \geq \quad ||g((s_1, s_2)) - z|| - ||\eta(1, g((s_1, s_2))) - g((s_1, s_2))|| \\ & \geq \quad d_0 - \delta > d_0 - \frac{d_0}{2} = \frac{d_0}{2} > 0, \quad \forall\, (s_1, s_2) \in D. \end{aligned}$$

Logo $h^{\pm} \neq 0$. Agora defina $\psi_0, \psi_1 : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ da seguinte forma

$$\psi_0(s_1, s_2) = (I'(s_1 w^+) \cdot s_1 w^+, I'(s_2 w^-) \cdot s_2 w^-)$$

$$\psi_1(s_1, s_2) = (I'(h^+(s_1, s_2)) \cdot h^+(s_1, s_2), I'(h^-(s_1, s_2)) \cdot h^-(s_1, s_2)).$$

Pela geometria da aplicação $t \mapsto I(tw^{\pm})$ $(t \geq 0)$ temos que

(i) $I'(aw^{\pm}) \cdot aw^{\pm} > 0$;

(ii) $I'(bw^{\pm}) \cdot bw^{\pm} < 0$.

Aplicando a definição do grau em $\mathbb{R}$ (ver Apêndice C Definição (C.1)) para função contínua

$$\begin{aligned} f_1 : \quad [a, b] \quad & \longrightarrow \mathbb{R} \\ s_1 \quad & \longmapsto f_1(s_1) = I'(s_1 w^+) \cdot s_1 w^+ \end{aligned}$$

obtemos

$$d(f_1, [a, b], 0) = sgn(-f_1(a)) = -1.$$

De maneira análoga, considerando

$$\begin{aligned} f_2: \quad [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s_1 &\longmapsto f_2(s_1) = I'(s_2w^-)\cdot s_2w^- \end{aligned}$$

tem-se

$$d(f_2,[a,b],0) = sgn(-f_2(a)) = -1.$$

Pela fórmula do produto para o grau de Brouwer (ver Apêndice C, Proposição C.2) obtemos

$$\begin{aligned} d(\psi_0, D, (0,0)) &= d(I'(s_1w^+),[a,b],0)\cdot d(I'(s_2w^-),[a,b],0) \\ &= d(f_1,[a,b]),0)\cdot d(f_2,[a,b],0) \\ &= (-1)\cdot(-1) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Sendo $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{\beta-\beta_0}{4}, \dfrac{\lambda\delta}{8}\right\} \Rightarrow \varepsilon \leq \dfrac{\beta-\beta_0}{4}$ com isso $\beta_0 \leq \beta - 4\varepsilon$. Portanto, de (1.10), temos

$$I(g(s_1,s_2)) < \beta_0 \leq \beta - 4\varepsilon < \beta - 2\varepsilon, \quad (s_1,s_2) \in \partial D.$$

Mostrando que $g(s_1,s_2) \notin I^{-1}([\beta-2\varepsilon, \beta+2\varepsilon])$ para todo $(s_1,s_2) \in \partial D$. Usando o item (a), obtido no Lema da deformação, concluímos que

$$h = \eta(1, g(\partial D)) = g((\partial D)).$$

Usando a dependência de fronteira para o grau de Brouwer (ver Apêndice C, Proposição C.3) temos

$$d(\psi_1, D, (0,0)) = d(\psi_0, D, (0,0)) = 1 \neq 0.$$

Com isso, pela existência de solução para o grau de Brouwer (ver Apêndice C Proposição C.4), existe $(s_0,t_0) \in D$ tal que $\psi_1(s_0,t_0) = (0,0)$, ou seja,

$$\psi_1(s_0,t_0) = (I'(h^+(s_0,t_0))\cdot h^+(s_0,t_0), I'(h^-(s_0,t_0))\cdot h^-(s_0,t_0)) = (0,0).$$

Implicando que $I'(h^+(s_0,t_0)) \cdot h^+(s_0,t_0) = 0$ e $I'(h^-(s_0,t_0)) \cdot h^-(s_0,t_0) = 0$ com isso fica provado que $h(s_0,t_0) \in \mathcal{M}$

Portanto concluímos que $h(s_0,t_0) \in \eta(1, g(D)) \cap \mathcal{M}$. $\blacksquare$

Capítulo 2

Problema Crítico

Para este estudo utilizamos como texto base o artigo de Cerami, Solimini e Struwe [9]. Neste capítulo estudamos a existência de solução nodal para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = u\,|u|^{2^*-2}\;, & \Omega \\ u = 0\;, & \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$, o expoente crítico de Sobolev. Além disso, consideramos λ tal que $\lambda \in (0, \lambda_1)$ onde λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Uma das dificuldades para resolver este tipo de problema é que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ não é compacta.

Segue abaixo o resultado principal deste Capítulo

Teorema 2.1 *Suponha $N \geq 6$, $\lambda \in (0, \lambda_1)$, então o problema (2.1) admite uma solução nodal.*

2.1 Motivação para escolha de λ

Para demonstrarmos o Teorema 2.1 vamos precisar da existência de solução positiva para o problema (2.1). Sendo assim vamos analisar os casos em que

não podemos garantir a existência de tal solução.

Mostraremos que se $\lambda \notin (0, \lambda_1)$, então não existe solução positiva para o problema (2.1). Aqui λ_1 denota o primeiro autovalor do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Assim seja $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ a auto função associada a λ_1, isto é, $-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1$.

Proposição 2.2 *Não existe solução positiva para o problema (2.1) quando $\lambda > \lambda_1$.*

Demonstração.

Suponhamos, por contradição, que exista $u \in H_0^1(\Omega)$, $u > 0$, solução de (2.1), isto é,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \lambda \int_\Omega uv + \int_\Omega |u|^{2^*-2} uv \ , \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2}$$

Por outro lado, sendo $-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1$, temos

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v = \lambda_1 \int_\Omega u_1 v \ , \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.3}$$

Substituindo $v = u_1$ em (2.2) e $v = u$ em (2.3) obtemos

$$\lambda \int_\Omega uu_1 + \int_\Omega u^{2^*-1} u_1 = \lambda_1 \int_\Omega u_1 u,$$

ou seja,

$$\lambda \int_\Omega uu_1 < \lambda_1 \int_\Omega u_1 u.$$

Portanto, $\lambda < \lambda_1$ o que é uma contradição ■

2.1.1 Identidade de Pohozaev

A identidade de Pohozaev, pode ser encontrada em sua forma mais geral em [30]. Aqui apresentaremos um resultado relacionado ao problema (2.1).

Definição 2.3 *Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio estrelado em relação à origem se para cada $x \in \overline{\Omega}$ o segmento de reta $\{\lambda x \ ; \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ está contido em $\overline{\Omega}$.*

Teorema 2.4 *Sejam $N \geq 3$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ solução do problema (2.1). Então a função u satisfaz a igualdade*

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x\nu(x) = \lambda \int_\Omega u^2$$

onde $\nu(x)$ é o vetor normal a $\partial\Omega$ em x.

Demonstração. Ver [31]. ■

Proposição 2.5 *Não existe solução positiva para o problema (2.1) quando $\lambda \leq 0$ e Ω é um domínio estrelado.*

Demonstração.

Suponhamos que exista $u \in H_0^1(\Omega)$, $u > 0$, solução do problema (2.1), então pelo Teorema 2.4 temos

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x\nu(x) = \lambda \int_\Omega u^2.$$

Por outro lado, Ω é estrelado e, sem perda de generalidade, podemos supor que seja estrelado em relação a origem (a menos de translação). Logo, a menos de um conjunto de medida nula em $\partial\Omega$, tem-se $x \cdot \nu(x) > 0$. Sendo assim $\lambda < 0$ o que é um absurdo, pois o primeiro lado da desigualdade teria que ser negativo.

Já no caso em que $\lambda = 0$ teríamos $|\nabla u|^2 = 0$ o que implicaria em $\Delta u = 0$ e por (2.1) teríamos $u = 0$ o que é uma contradição. Portanto, (2.1) não tem solução para $\lambda \leq 0$. ■

2.2 Funcional associado ao problema

O funcional associado ao problema (2.1) é dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}.$$

Temos ainda que I_λ é de classe C^1 com

$$I'_\lambda(u)\cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega uv - \int_\Omega |u|^{2^*-2}uv \ , \ \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Sendo assim resolver o problema (2.1) é equivalente a encontrar pontos críticos para o funcional I_λ em $H_0^1(\Omega)$.

2.3 Formulação Variacional

Denotaremos u_0 $(-u_0)$ a solução positiva (negativa) de (2.1) (ver Brezis. H and Nirenberg [4]) e por c_0 o número real

$$I_\lambda(u_0) = c_0 = I_\lambda(-u_0)$$

o qual é caracterizado pela expressão

$$c_0 = \min\left\{ I(u) : u \in H_0^1(\Omega), u \geq 0, u \neq 0, \frac{|u|_{2^*}^{2^*}}{||u||^2 - \lambda |u|_2^2} = 1 \right\}.$$

Seja

$$f_\lambda(u) = \begin{cases} 0 \ , \ \text{ se } \ u = 0 \\ \\ \dfrac{|u|_{2^*}^{2^*}}{||u||^2 - \lambda |u|_2^2} \ , \ \text{ se } \ u \neq 0. \end{cases}$$

Denote por

$$U = \{ u \in H_0^1(\Omega) : f_\lambda(u^+) = 1 = f_\lambda(u^-) \}$$

e por

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : |f_\lambda(u^\pm) - 1| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Pela geometria do funcional tem-se $U \neq \emptyset$. Além disso, $U \subset \mathcal{N}$ e se $u \in \mathcal{N}$, então $u^\pm \neq 0$.

Lema 2.6 *Se $u \in U$, então*

$$\max_{t \geq 0} I_\lambda(tu^\pm) = I_\lambda(u^\pm).$$

Demonstração.

Para $u \in U$ defina a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_\pm : \quad [0, +\infty) &\to \mathbb{R} \\ t \quad &\longmapsto \gamma_\pm(t) = I_\lambda(tu^\pm). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \gamma'_\pm(t) &= I'_\lambda(tu^\pm) \cdot u^\pm \\ &= t||u^\pm||^2 - \lambda t|u^\pm|_2^2 - t^{2^*-1}|u^\pm|_{2^*}^{2^*} \\ &= t|u^\pm|_{2^*}^{2^*} - t^{2^*-1}|u^\pm|_{2^*}^{2^*} \\ &= (t - t^{2^*-1})|u^\pm|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

Com isso, $\gamma'_\pm(1) = 0$. Por outro lado segue que $\gamma_\pm(t) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ e $\gamma_\pm(t) > 0$ para t próximo de 0 (zero) pela direita. De fato, basta ver que

$$\begin{aligned} \gamma_\pm(t) &= I_\lambda(tu^\pm) \\ &= \frac{t^2}{2}||u^\pm||^2 - \frac{\lambda t^2}{2}|u^\pm|_2^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}|u^\pm|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{t^2}{2}(||u^\pm||^2 - \lambda|u^\pm|_2^2) - \frac{t^{2^*}}{2^*}|u^\pm|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{t^2}{2}|u^\pm|_{2^*}^{2^*} - \frac{t^{2^*}}{2^*}|u^\pm|_{2^*}^{2^*} \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*}}{2^*}\right)|u^\pm|_{2^*}^{2^*} \\ &= t^{2^*}\left(\frac{t^{2-2^*}}{2} - \frac{1}{2^*}\right)|u^\pm|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

Diante disso vamos mostrar que $\max_{t \geq 0} \gamma_\pm(t) = \gamma_\pm(1)$. Já vimos anteriormente que $\gamma'_\pm(1) = 0$. Suponhamos, por contradição, que exista $1 \neq t_1 > 0$ tal que $\gamma'_\pm(t_1) = 0$, então

$$(t_1 - t_1^{2^*-1})|u^\pm|_{2^*}^{2^*} = 0$$

por $|u^{\pm}|_{2^*}^{2^*} \neq 0$ temos que $(t_1 - t_1^{2^*-1}) = 0$, isto é,

$$t_1^{2^*-2} = 1$$

o que contradiz o fato de que $t_1 \neq 1$. Portanto,

$$\max_{t \geq 0} I_\lambda(tu^{\pm}) = I_\lambda(u^{\pm}) \ , \ \forall \ u \in U.$$

■

Lema 2.7 *Se $u \in \mathcal{N}$, então existe $K > 0$ tal que*

$$|u^{\pm}|_{2^*}^{2^*} > \frac{1}{2}(||u^{\pm}||^2 - \lambda|u^{\pm}|_2^2) \geq k||u^{\pm}||^2 \geq kS|u^{\pm}|_{2^*}^2$$

onde S é melhor constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.

Demonstração.

Seja $u \in \mathcal{N}$, pelo fato de que

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{||u||^2}{|u|_2^2} \tag{2.4}$$

e por $\lambda \in (0, \lambda_1)$ temos que

$$||u||^2 > \lambda|u|_2^2,$$

ou seja,

$$||u||^2 - \lambda|u|_2^2 > 0. \tag{2.5}$$

Por outro lado,

$$|f_\lambda(u^{\pm}) - 1| < \frac{1}{2},$$

isto é,

$$-\frac{1}{2} < f_\lambda(u^{\pm}) - 1 < \frac{1}{2}.$$

Usando a definição da f_λ, o fato de que $-\dfrac{1}{2} < f_\lambda(u^{\pm}) - 1$ e $(\boxed{2.5})$ obtemos

$$|u^{\pm}|_{2^*}^{2^*} > \frac{1}{2}(||u^{\pm}||^2 - \lambda|u^{\pm}|_2^2). \tag{2.6}$$

Temos ainda, por 2.4, que

$$|u^{\pm}|_{2^*}^{2^*} > \frac{1}{2}(||u^{\pm}||^2 - \lambda|u^{\pm}|_2^2) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)||u^{\pm}||^2. \tag{2.7}$$

Portanto, de (2.6) e (2.7) concluímos que

$$|u^{\pm}|_{2^*}^{2^*} > \frac{1}{2}(||u^{\pm}||^2 - \lambda|u^{\pm}|_2^2) \geq k||u^{\pm}||^2 \tag{2.8}$$

onde $K = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\right) > 0$.

Pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, concluímos que

$$|u^{\pm}|_{2^*}^{2^*} > \frac{1}{2}(||u^{\pm}||^2 - \lambda|u^{\pm}|_2^2) \geq k||u^{\pm}||^2 \geq kS|u^{\pm}|_{2^*}^2,$$

sendo S a melhor constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. ■

Corolário 2.8 *Existe $\alpha > 0$ tal que $||u^{\pm}|| \geq \alpha > 0$ para todo $u \in \mathcal{N}$.*

Demonstração.

Basta ver que se $u \in \mathcal{N}$ então $|u^{\pm}|_{2^*}^{2^*} > kS|u^{\pm}|_{2^*}^2$. Daí, $|u^{\pm}|_{2^*}^{2^*-2} > kS > 0$, isto é, pela imersão de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ temos

$$||u^{\pm}|| \geq \alpha > 0$$

onde $\alpha = (kS^{3-2^*})^{\frac{1}{2^*-2}} > 0$. ■

2.4 Condição de Palais-Smale

Definição 2.9 *Sejam E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Se existirem $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset E$ tais que*

$$I(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'(u_n) \to 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty$$

dizemos que (u_n) é uma ***sequência de Palais-Smale*** *no nível c para I, ou de forma resumida, (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I. Se tal sequência possui subsequência convergente, diz-se que I satisfaz a* ***condição Palais-Smale*** *no nível c ou que I satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Lema 2.10 *Para qualquer* $\lambda \in (0, \lambda_1)$, $N \geq 3$ *e* $c < c_0 + \dfrac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$ *tem-se que o funcional* I_λ *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *em* $\mathcal{N}$.

Demonstração.

Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ tal que

$$I_\lambda(u_n) = c + o_n(1) \ \text{ e } \ I'_\lambda(u_n) = o_n(1).$$

Daí, se $I'_\lambda(u_n) = o_n(1)$, obtemos

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda |u_n|^2) = \int_\Omega |u_n|^{2^*} + o_n(1). \tag{2.9}$$

Logo, de (2.9) e pelo Lema 2.7, segue que

$$\begin{aligned} c + o_n(1) = I_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda|u_n|^2) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u_n|^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |u_n|^{2^*} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u_n|^{2^*} + o_n(1) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)|u_n|_{2^*}^{2^*} + o_n(1) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) K||u_n^\pm||^2 + o_n(1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$||u_n^\pm|| \leq \left[\frac{1}{K}\left(\frac{22^*}{2^* - 2}\right)(c + o_n(1))\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Consequentemente por $||u_n|| \leq ||u_n^+|| + ||u_n^-||$ temos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Com isso, a menos de subsequência, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Por [4] temos que o limite fraco de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é solução positiva do problema (2.1), isto é,

$$I'_\lambda(u) \cdot v = 0 \ , \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \ \text{ e } \ I_\lambda(u) \geq c_0.$$

Agora defina $z_n = u_n - u$. Para finalizar vamos mostrar que $||z_n||^2 \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Por Brezis-Lieb (ver Apêndice D Lema D.10) temos que

$$|u_n|_{2^*}^{2^*} - |z_n|_{2^*}^{2^*} = |u|_{2^*}^{2^*} + o_n(1). \tag{2.10}$$

Assim, usando (2.10) e imersão compacta (ver Apêndice E) de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(z_n) &= \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega (u_n - u)^2\right) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |z_n|^{2^*} \\
&= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_\Omega \nabla u_n \nabla u + \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{2}|u_n|_2^2 + \lambda \int_\Omega u_n u + \\
&- \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 - \frac{1}{2^*}|z_n|_{2^*}^{2^*} + \frac{1}{2^*}|u_n|_{2^*}^{2^*} - \frac{1}{2^*}|u_n|_{2^*}^{2^*} + \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*} - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*} \\
&= I_\lambda(u_n) + I_\lambda(u) - 2\left[\frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}\right] + o_n(1) \\
&= I_\lambda(u_n) + I_\lambda(u) - 2I_\lambda(u) + o_n(1) \\
&= I_\lambda(u_n) - I_\lambda(u) + o_n(1),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I_\lambda(z_n) \to c - I_\lambda(u) \le c - c_0 < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}\ , \quad \text{para} \ \ n \to +\infty. \tag{2.11}$$

Por outro lado, ainda de (2.10)

$$\begin{aligned}
||z_n||^2 &= ||u_n||^2 - 2\int_\Omega \nabla u_n \nabla u + ||u||^2 + \lambda|u_n|_2^2 - \lambda|u_n|_2^2 + |u_n|_{2^*}^{2^*} - |u_n|_{2^*}^{2^*} \\
&= I'_\lambda(u_n)\cdot u_n + \lambda|u_n|_2^2 + ||u||^2 - 2\int_\Omega \nabla u_n \nabla u + |u_n|_{2^*}^{2^*} - |z_n|_{2^*}^{2^*} + |z_n|_{2^*}^{2^*} \\
&= I'_\lambda(u_n)\cdot u_n - I'_\lambda(u)\cdot u + o_n(1) + |z_n|_{2^*}^{2^*} \\
&= I'_\lambda(u_n)\cdot u_n + |z_n|_{2^*}^{2^*} + o_n(1),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_n ||z_n||^2 = \lim_n |z_n|_{2^*}^{2^*} := b \ge 0. \tag{2.12}$$

Portanto, de (2.11) e (2.12), segue que

$$\lim_n I_\lambda(z_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) b = \frac{b}{N} < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}. \tag{2.13}$$

Para concluir basta mostrar que $b = 0$. Suponhamos, por absurdo, que $b > 0$. Recorde que

$$S|z_n|_{2^*}^2 \leq ||z_n||^2$$

com isso de (2.12) temos

$$S\, b^{\frac{2}{2^*}} \leq b \Leftrightarrow S \leq b^{1-\frac{2}{2^*}}$$

e consequentemente

$$S^{\frac{N}{2}} \leq b \tag{2.14}$$

pois $1 - \dfrac{2}{2^*} = \dfrac{2}{N}$. Daí, de (2.13) e (2.14)

$$\frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} \leq \frac{b}{N} < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$$

o que é um absurdo. Logo devemos ter $b = 0$, ou seja, $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ para $n \to +\infty$. ■

2.5 Existência de uma sequência $(PS)_c$

Denote por $\mathcal{P}$ o cone das funções não negativas em $H_0^1(\Omega)$ e seja Σ o conjunto de todas as aplicações $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to H_0^1(\Omega)$ tais que

(a) $\sigma \in C(Q, H_0^1(\Omega))$, onde $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Para todo $t, s \in [0,1]$ tem-se

(b) $\sigma(t, 0) = 0$;

(c) $\sigma(0, s) \in \mathcal{P}$;

(d) $\sigma(1, s) \in -\mathcal{P}$;

(e) $I_\lambda(\sigma(t,1)) \leq 0$ e $f_\lambda(\sigma(t,1)) \geq 2$.

Note que $\Sigma \neq \emptyset$. Basta considerar, para cada $u \in U$, a aplicação contínua

$$\begin{aligned} h: \quad [0,1] & \longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ t & \longmapsto h(t) = tu^- + (1-t)u^+. \end{aligned}$$

Daí, fixado $k > 0$ suficientemente grande, defina

$$\begin{aligned} \sigma: \quad Q & \longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ (t,s) & \longmapsto \sigma(t,s) = k[sh(t)]. \end{aligned}$$

O Lema a seguir nos fornece uma caracterização do tipo minimax para o conjunto U.

Lema 2.11

$$\inf_{\sigma \in \Sigma} \sup_{u \in \sigma(Q)} I_\lambda(u) = \inf_{u \in U} I_\lambda(u)$$

Demonstração.

Primeiramente mostraremos que se $\sigma \in \Sigma$, então

$$\sigma(Q) \cap U \neq \emptyset. \tag{2.15}$$

Seja $\sigma \in \Sigma$ e considere a aplicação contínua

$$\begin{aligned} \psi: \quad Q & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t,s) & \longmapsto \psi(t,s) = (\psi_1(t,s), \psi_2(t,s)). \end{aligned}$$

onde $\psi_1 = f_\lambda(\sigma(t,s)^+) - f_\lambda(\sigma(t,s)^-)$ e $\psi_2 = f_\lambda(\sigma(t,s)^+) + f_\lambda(\sigma(t,s)^-) - 2$.

Note que $\psi_2(t,0) = 0$, pois $\sigma(t,0) = 0$, e pelo fato de que

$$f_\lambda(\sigma(t,s)) \leq f_\lambda(\sigma(t,s)^+) + f_\lambda(\sigma(t,s)^-)$$

tem-se que

$$\psi_2(t,1) = f_\lambda(\sigma(t,1)^+) + f_\lambda(\sigma(t,1)^-) - 2 \geq f_\lambda(\sigma(t,1)) - 2 \geq 0.$$

Então, pelo Teorema de Miranda (ver Apêndice F Teorema F.3) exite $\overline{x} \in Q$ tal que

$$\psi(\overline{x}) = (0,0),$$

isto é,

$$f_\lambda(\sigma(\overline{x})^+) - f_\lambda(\sigma(\overline{x})^-) = 0 = f_\lambda(\sigma(\overline{x})^+) + f_\lambda(\sigma(\overline{x})^-) - 2.$$

Donde segue que,

$$f_\lambda(\sigma(\overline{x})^+) = f_\lambda(\sigma(\overline{x})^-)$$

e consequentemente, por $f_\lambda(\sigma(\overline{x})^+) + f_\lambda(\sigma(\overline{x})^-) = 2$, temos

$$f_\lambda(\sigma(\overline{x})^+) = f_\lambda(\sigma(\overline{x})^-) = 1.$$

Mostrando que $\sigma(\overline{x}) \in U$.

Reciprocamente, se para cada $\overline{u} \in U$ considerarmos $\overline{\sigma} \in \Sigma$ tal que

$$\overline{\sigma}(Q) \subset \{\alpha\overline{u}^+ + \beta\overline{u}^- : \alpha, \beta \in [0, +\infty)\}. \tag{2.16}$$

Note que 2.16 faz sentido pois se $\overline{u} \in U$, então $\overline{u}^\pm \neq 0$ e com isso podemos definir $\overline{\sigma}(t,s) = sR((1-t)\overline{u}^+ + t\overline{u}^-)$ com $R > 0$ suficientemente grande.

Pela definição de f_λ e usando o crescimento do funcional I_λ (Lema 2.6) temos que

$$I_\lambda(\overline{u}) = \max_{u\in\overline{\sigma}(Q)} I_\lambda(u) \ , \ \overline{u} \in U. \tag{2.17}$$

Segue, de (2.17), que

$$\inf_{\sigma\in\Sigma} \sup_{u\in\sigma(Q)} I_\lambda(u) \leq \sup_{u\in\overline{\sigma}(Q)} I_\lambda(u) = I_\lambda(\overline{u}) \ , \ \forall\, \overline{u} \in U. \tag{2.18}$$

Por outro lado para todo $\sigma \in \Sigma$, de (2.15), temos

$$\begin{aligned} \inf_{u\in U} I_\lambda(u) &\leq \inf_{u\in\sigma(Q)\cap U} I_\lambda(u) \\ &\leq \sup_{u\in\sigma(Q)\cap U} I_\lambda(u) \\ &\leq \sup_{u\in\sigma(Q)} I_\lambda(u), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\inf_{u\in U} I_\lambda(u) \leq \inf_{\sigma\in\Sigma} \sup_{u\in\sigma(Q)} I_\lambda(u) \tag{2.19}$$

Portanto, de (2.18) e (2.19), tem-se

$$\inf_{\sigma\in\Sigma} \sup_{u\in\sigma(Q)} I_\lambda(u) = \inf_{u\in U} I_\lambda(u).$$

■

Defina $c = \inf_{u\in U} I_\lambda(u)$, considere uma sequência minimizante $\{\overline{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ e denote por $\overline{\sigma}_n$ a sequência correspondente de aplicações em Σ satisfazendo

$$\overline{\sigma}_n(Q) \subset \{\alpha\overline{u}_n^+ + \beta\overline{u}_n^- : \alpha,\beta \in [0,+\infty)\}.$$

Pelo Lema 2.11, mais precisamente por (2.17), temos

$$\lim_n \max_{u\in\overline{\sigma}_n(Q)} I_\lambda(u) = \lim_n I_\lambda(\overline{u}_n) = c. \tag{2.20}$$

Teorema 2.12 *Existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que*

(a) $\lim_n dist(u_n, \overline{\sigma}_n(Q)) = 0$;

(b) $\lim_n I'_\lambda(u_n) = 0$;

(c) $\lim_n I_\lambda(u_n) = c$.

Demonstração.

Caso contrário para n suficiente grande existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathcal{N}_\delta \cap \overline{\sigma}_n(Q) = \emptyset \tag{2.21}$$

onde

$$\mathcal{N}_\delta = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \exists\, v \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } ||u-v|| \leq \delta, ||I'_\lambda(v)|| \leq \delta \text{ e } |I_\lambda(v) - c| \leq \delta\right\},$$

ou seja, $\mathcal{N}_\delta$ é uma vizinhança de

$$K_c = \{u \in H_0^1(\Omega) : I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}.$$

Portanto, pelo Teorema F.4 (ver Apêndice F) existe $\eta : [0,1] \times H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ tal que para $\varepsilon > 0$ tem-se

(i) $\eta(0,u) = u$;

(ii) $\eta(t,u) = u$, se $u \notin I_\lambda^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ para $t \in [0,1]$;

(iii) $\eta(1, I_\lambda^{c+\varepsilon} \backslash \mathcal{N}_\delta) \subset I_\lambda^{c-\varepsilon}$;

(iv) $\eta(t,-u) = -\eta(t,u)$ para $t \in [0,1]$.

Além disso, por H. Hofer [17] Lema 1, temos

(v) $\eta(1, (I_\lambda^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{P}) \backslash \mathcal{N}_\delta) \subset I_\lambda^{c-\varepsilon} \cap \mathcal{P}$;

onde $I_\lambda^\gamma = \{u \in H_0^1(\Omega) : I_\lambda(u) \leq \gamma\}$.

Por (2.20) e (2.21) podemos escolher $m \in \mathbb{N}$ (suficientemente grande) de tal forma que

$$\overline{\sigma}_m(Q) \subset I_\lambda^{c+\varepsilon} \;\text{ e }\; \overline{\sigma}_m(Q) \cap \mathcal{N}_\delta = \emptyset. \tag{2.22}$$

Agora definamos a aplicação contínua

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : \quad Q \quad &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ (t,s) \quad &\longmapsto \tilde{\sigma}(t,s) = \eta(1, \overline{\sigma}_m(t,s)). \end{aligned}$$

Afirmamos que $\tilde{\sigma} \in \Sigma$. De fato,

(a) Claramente $\tilde{\sigma} \in C(Q, H_0^1(\Omega))$;

(b) $\tilde{\sigma}(t,0) = \eta(1, \overline{\sigma}_m(t,0)) = \eta(1,0) = 0$;

(c) Segue do item (v) que $\tilde{\sigma}(0,s) = \eta(1, \overline{\sigma}_m(0,s)) \in \mathcal{P}$;

(d) Usando o item (iv) tem-se

$$\tilde{\sigma}(1,s) = \eta(1, \overline{\sigma}_m(1,s)) = -\eta(1, -\overline{\sigma}_m(1,s)) \in -\mathcal{P};$$

(e) $I_\lambda(\tilde{\sigma}(t,1)) \leq 0$ e $f_\lambda(\tilde{\sigma}(t,1)) \geq 2$.

De fato, note que $\overline{\sigma}_m(t,1) \notin I_\lambda^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ logo de (ii) tem-se que $\eta(1,\overline{\sigma}(t,1)) = \overline{\sigma}(t,1)$.

Concluímos que $\tilde{\sigma} \in \Sigma$. Além disso, combinando (2.22) com o item (iii) obtemos $\tilde{\sigma}(Q) \subset I_\lambda^{c-\varepsilon}$. Portanto, pelo Lema 2.11 segue que

$$c := \inf_{u\in U} I_\lambda(u) = \inf_{\sigma\in\Sigma} \sup_{u\in\sigma(Q)} I_\lambda(u) \leq \sup_{u\in\tilde{\sigma}(Q)} I_\lambda(u) \leq c-\varepsilon$$

o que é um absurdo. ■

Corolário 2.13 *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $u_n \in \mathcal{N}$ para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração.

Pelo Teorema 2.12 item (a) existe

$$v_n = \alpha_n \overline{u}_n^+ + \beta_n \overline{u}_n^- \in \overline{\sigma}_n(Q)$$

em que

$$dist(u_n, v_n) \to 0 \text{ quando } n \to +\infty. \tag{2.23}$$

Sendo $c_0 > 0$, de (2.20), para $0 < \varepsilon < \dfrac{c_0}{2}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$

$$I_\lambda(\overline{u}_n) = I_\lambda(\overline{u}_n^+) + I_\lambda(\overline{u}_n^-) < c + \varepsilon, \tag{2.24}$$

$$I_\lambda(v_n) = I_\lambda(\alpha_n\overline{u}_n^+) + I_\lambda(\beta_n\overline{u}_n^-) > c - \varepsilon. \tag{2.25}$$

Subtraindo (2.25) de (2.24) temos

$$I_\lambda(\overline{u}_n^+) - I_\lambda(\alpha_n\overline{u}_n^+) + I_\lambda(\overline{u}_n^-) - I_\lambda(\beta_n\overline{u}_n^-) < 2\varepsilon.$$

Do Lema 2.6 segue que

$$I_\lambda(\overline{u}_n^+) - I_\lambda(\alpha_n\overline{u}_n^+) < 2\varepsilon,$$

$$I_\lambda(\overline{u}_n^-) - I_\lambda(\beta_n\overline{u}_n^-) < 2\varepsilon,$$

ou seja,

$$I_\lambda(\overline{u}_n^+) - 2\varepsilon < I_\lambda(\alpha_n \overline{u}_n^+),$$
$$I_\lambda(\overline{u}_n^-) - 2\varepsilon < I_\lambda(\beta_n \overline{u}_n^-).$$

Pelo fato de que $I_\lambda(\overline{u}_n^\pm) \geq c_0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$c_0 - 2\varepsilon \leq I_\lambda(\overline{u}_n^+) - 2\varepsilon < I_\lambda(\alpha_n \overline{u}_n^+),$$
$$c_0 - 2\varepsilon \leq I_\lambda(\overline{u}_n^-) - 2\varepsilon < I_\lambda(\beta_n \overline{u}_n^-).$$

Daí,

$$I_\lambda(v_n^+) = I_\lambda(\alpha_n \overline{u}_n^+) > c_0 - 2\varepsilon,$$
$$I_\lambda(v_n^-) = I_\lambda(\beta_n \overline{u}_n^-) > c_0 - 2\varepsilon.$$

Portanto, de $0 < \varepsilon < \dfrac{c_0}{2}$, concluímos que $v_n^\pm \neq 0$. Consequentemente de (2.23) segue que $u_n^\pm \neq 0$ para n suficientemente grande. Além disso, pelo fato de que $I'_\lambda(u_n) \cdot v = o_n(1)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$||u_n^\pm||^+ - \lambda |u_n^\pm|_2^2 - |u_n^\pm|_{2^*}^{2^*} = o_n(1)$$

assim

$$\begin{aligned}
\left| \frac{|u_n^\pm|_{2^*}^{2^*}}{||u_n^\pm||^2 - \lambda |u_n^\pm|_2^2} - 1 \right| &= \left| \frac{|u_n^\pm|_{2^*}^{2^*} - ||u_n^\pm||^2 + \lambda |u_n^\pm|_2^2}{||u_n^\pm||^2 - \lambda |u_n^\pm|_2^2} \right| \\
&= \left| - \left(\frac{||u_n^\pm||^2 - \lambda |u_n^\pm|_2^2 - |u_n^\pm|_{2^*}^{2^*}}{||u_n^\pm||^2 - \lambda |u_n^\pm|_2^2} \right) \right| \\
&= \frac{o_n(1)}{||u_n^\pm||^2 - \lambda |u_n^\pm|_2^2} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty
\end{aligned}$$

já que existe $M > 0$ tal que

$$\frac{1}{||u_n^\pm||^2 - \lambda |u_n^\pm|_2^2} \leq M.$$

Com isso $u_n \in \mathcal{N}$ para n suficientemente grande. ■

Em resumo, para n suficientemente grande, temos

- $u_n \in \mathcal{N}$;
- $I_\lambda(u_n) \to c$;
- $I'_\lambda(u_n) \to 0$.

Observação 2.14 *Se* $c = \inf_{u\in U} I_\lambda(u) < c_0 + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$, *usando o Lema 2.10, teríamos, a menos de subsequência,* $u_n \to u$ *em* $H_0^1(\Omega)$ *quando* $n \to +\infty$. *Além disso, pelo Corolário 2.8,* $u^{\pm} \neq 0$. *Consequentemente pela regularidade do funcional* I_λ, *para* $v \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $||v|| \leq 1$, *obteríamos*

$$0 \leq ||I'_\lambda(u) \cdot v|| \leq \left\| \lim_n I'_\lambda(u_n) \right\| = 0,$$

ou seja, $u \in H_0^1(\Omega)$ *seria solução nodal do problema (2.1).*

Portanto, pela observação feita anteriormente, para finalizarmos este capítulo restar-nos mostrar que:

$$c = \inf_{u\in U} I_\lambda(u) < c_0 + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}.$$

2.6 Um limite superior para $c = \inf_{u\in U} I_\lambda(u)$.

Alguns resultados a seguir são bastantes técnicos e sua demonstração foge do objetivo deste trabalho por isso omitiremos algumas demonstrações.

Para $x_0 \in \Omega$ fixemos $\rho > 0$ de tal forma que $B_{\frac{\rho}{2}}(x_0) \subset \Omega$ e definamos

$$u_{\mu,x_0}(x) = \frac{\varphi(x)}{(\mu + |x|^2)^{\frac{N}{2^*}}} \ , \ \mu > 0$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ com

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ se } \ x \in B_{\frac{\rho}{2}}(x_0) \\ 0 \ \text{ se } \ x \in [B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)]^c \end{cases}$$

Lema 2.15 *As expressões abaixo são válidas*

$$||u_{\mu,x_0}||^2 = S^{\frac{N}{2}} + O(\mu^{\frac{(N-2)}{2}})$$
$$|u_{\mu,x_0}|_{2^*}^2 = S^{\frac{N}{2}} + O(\mu^{\frac{N^2}{2(N-2)}})$$
$$|u_{\mu,x_0}|_2^2 = K_1\mu + O(\mu^{\frac{(N-2)}{2}})$$
$$|u_{\mu,x_0}|_1 \leq K_2\mu^{\frac{(N-2)}{4}}$$

onde K_1 e K_2 são constantes positivas que depende somente de N com $\dfrac{K_1}{K_2} = S$.

Demonstração. Ver [4]. ■

Observação 2.16 *$f = O(g)$ quando*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq C$$

para algum $C > 0$. Então se considerarmos $g(\mu) = \mu > 0$ temos que

$$\lim_{\mu\to 0} \frac{O(\mu)}{\mu} \leq C,$$

isto é, existe $\delta > 0$ tal que $|\mu| < \delta$ tem-se

$$O(\mu) \leq C\mu$$

Lema 2.17 *Existem constantes positivas K_4 e K_5 tais que*

$$|\alpha u_0 + \beta u_{\mu,x_0}|_{2^*}^{2^*} \geq |\beta u_{\mu,x_0}|_{2^*}^{2^*} + K_4|\alpha u_0|_{2^*}^{2^*} - K_5\beta^{2^*}\mu^{\frac{N}{2}}$$

Demonstração. Ver [11]. ■

Afirmação: $c < c_0 + \dfrac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$.

Recorde que

$$\inf_{\sigma\in\Sigma} \sup_{u\in\sigma(Q)} I_\lambda(u) = c.$$

Assim basta mostrarmos que

$$I_\lambda(\alpha u_0 + \beta u_{\mu,x_0}) < c_0 + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} \quad \text{para} \quad \alpha, \beta \in [0, +\infty).$$

Note que, pela geometria do funcional I_λ, é suficiente analisar o caso em que

$$||\alpha u_0 + \beta u_{\mu,x_0}|| < \tilde{K} \tag{2.26}$$

para uma escolha de $\tilde{K} > 0$ suficientemente grande. Pois $I_\lambda(\alpha u_0 + \beta u_{\mu,x_0}) \leq 0$ para $||\alpha u_0 + \beta u_{\mu,x_0}|| \geq \tilde{K}$.

Daí, de (2.26) e da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, segue que

$$|\alpha u_0 + \beta u_{\mu,x_0}|_{2^*}^{2^*} < \overline{K}.$$

Assim pelo Lema 2.17 e 2.15, para $\mu > 0$ suficientemente pequeno, tem-se

$$\overline{K} \geq |\beta|^{2^*}[S^{\frac{N}{2}} + O(\mu^{\frac{N^2}{2(N-2)}})] + K_4|\alpha|^{2^*}|u_0|_{2^*}^{2^*}$$

mostrando que α e β são limitadas.

Por resultados de regularidade tem-se que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Com isso

$$\Delta(\alpha u_0) = \alpha\Delta u_0 = \alpha|u_0|^{2^*-2}u_0 + \alpha\lambda u_0 \in L^\infty(\Omega).$$

Agora sejam $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$. Usando o Lema 2.15 e (2.17) temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(\alpha u_0 + \beta u_{\mu,x_0}) &= \frac{\alpha^2}{2}(||u_0||^2 - \lambda|u_0|_2^2) + \frac{\beta^2}{2}(||u_{\mu,x_0}||^2 - \lambda|u_{\mu,x_0}|_2^2) + \\
&+ \int_\Omega \nabla(\alpha u_0)\nabla(\beta u_{\mu,x_0}) - \int_\Omega (\alpha u_0)(\beta u_{\mu,x_0}) - \frac{1}{2^*}|\alpha u_0 + \beta u_{\mu,x_0}|_{2^*}^{2^*} \\
&\leq \frac{\alpha^2}{2}(||u_0||^2 - \lambda|u_0|_2^2) + \frac{\beta^2}{2}(||u_{\mu,x_0}||^2 - \lambda|u_{\mu,x_0}|_2^2) - \int_\Omega \Delta(\alpha u_0)(\beta u_{\mu,x_0}) + \\
&+ |\alpha u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}|\beta u_{\mu,x_0}|_1 - \frac{\beta^{2^*}}{2^*}|u_{\mu,x_0}|_{2^*}^{2^*} - \frac{K_4\alpha^{2^*}}{2^*}|u_0|_{2^*}^{2^*} + \frac{K_5\beta^{2^*}\mu^{\frac{N}{2}}}{2^*} \\
&\leq \frac{\alpha^2}{2}(||u_0||^2 - \lambda|u_0|_2^2) + \frac{\beta^2}{2}(||u_{\mu,x_0}||^2 - \lambda|u_{\mu,x_0}|_2^2) + \\
&+ |\Delta(\alpha u_0)|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}|\beta u_{\mu,x_0}|_1 + |\alpha u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}|\beta u_{\mu,x_0}|_1 + \\
&- \frac{\beta^{2^*}}{2^*}|u_{\mu,x_0}|_{2^*}^{2^*} - \frac{\alpha^{2^*}}{2^*}|u_0|_{2^*}^{2^*} + \frac{K_5\beta^{2^*}\mu^{\frac{N}{2}}}{2^*} \\
&= I_\lambda(\alpha u_0) + I_\lambda(\beta u_{\mu,x_0}) + |\Delta(\alpha u_0)|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}|\beta u_{\mu,x_0}|_1 + \\
&+ |\alpha u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}|\beta u_{\mu,x_0}|_1 + \frac{K_5\beta^{2^*}\mu^{\frac{N}{2}}}{2^*}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; I_\lambda(u_0) + I_\lambda(u_{\mu,x_0}) + |\Delta(\alpha u_0)|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}|\beta u_{\mu,x_0}|_1 + \\
&+ \; |\alpha u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}|\beta u_{\mu,x_0}|_1 + \frac{K_5\beta^{2^*}\mu^{\frac{N}{2}}}{2^*} \\
&= \; c_0 + \frac{1}{2}(||u_{\mu,x_0}||^2 - \lambda|u_{\mu,x_0}|_2^2) - \frac{1}{2^*}|u_{\mu,x_0}|_{2^*}^{2^*} + |\Delta(\alpha u_0)|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}|\beta u_{\mu,x_0}|_1 + \\
&+ \; |\alpha u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}|\beta u_{\mu,x_0}|_1 + \frac{K_5\beta^{2^*}\mu^{\frac{N}{2}}}{2^*} \\
&\leq \; c_0 + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2} + \frac{O(\mu^{\frac{N-2}{2}})}{2} - \frac{\lambda K_1\mu}{2} - \lambda\frac{O(\mu^{\frac{N-2}{2}})}{2} - \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2^*} - \frac{O(\mu^{\frac{N^2}{2(N-2)}})}{2^*} + \\
&+ \; |\Delta(\alpha u_0)|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}|\beta u_{\mu,x_0}|_1 + |\alpha u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}|\beta u_{\mu,x_0}|_1 + \frac{K_5\beta^{2^*}\mu^{\frac{N}{2}}}{2^*} \\
&\leq \; c_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)S^{\frac{N}{2}} + \frac{O(\mu^{\frac{N-2}{2}})}{2} - \frac{O(\mu^{\frac{N-2}{2}})}{2}\lambda - \frac{\lambda K_1\mu}{2} - \frac{O(\mu^{\frac{N^2}{2(N-2)}})}{2^*} + \\
&+ \; \mu^{\frac{N-2}{4}}|u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}\left(\frac{\beta K_2\alpha|\Delta(\alpha u_0)|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}}{|u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}} + \alpha K_2\beta\right) + \frac{K_5\beta^{2^*}\mu^{\frac{N}{2}}}{2^*} \\
&\leq \; c_0 + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + \mu^{\frac{N-2}{4}}|u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}K_8 - \mu\left(\frac{\lambda K_1}{2} - \frac{K_5\beta^{2^*}\mu^{\frac{N-2}{2}}}{2^*}\right) + \\
&+ \; \frac{C}{2}\,(1+\lambda)\,\mu^{\frac{N-2}{2}} + C\frac{\mu^{\frac{N^2}{2(N-2)}}}{2^*} \\
&= \; c_0 + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + \mu^{\frac{N-2}{4}}|u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}K_8 - \mu\left(\frac{\lambda K_1}{2} - \frac{K_5\beta^{2^*}\mu^{\frac{N-2}{2}}}{2^*}\right) + \\
&- \; \mu\left(-\frac{C}{2}\,(1+\lambda)\,\mu^{\frac{N-4}{2}} - \frac{C\mu^{\frac{N}{2}+\frac{2}{N-2}}}{2^*}\right) \\
&= \; c_0 + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + \mu^{\frac{N-2}{4}}|u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}K_8 + \\
&- \; \mu\left(\frac{\lambda K_1}{2} - \frac{K_5\beta^{2^*}\mu^{\frac{N-2}{2}}}{2^*} - \frac{C\,(1+\lambda)\mu^{\frac{N-4}{2}}}{2} - \frac{C\mu^{\frac{N}{2}+\frac{2}{N-2}}}{2^*}\right).
\end{aligned}
$$

Então para

$$
\mu < \left(\frac{2^*\lambda K_1}{2C\mu^{\frac{2N-2}{N-2}} + 2\mu K_5\beta^{2^*} + 2^*C(1+\lambda)}\right)^{\frac{2}{N-4}}
$$

tem-se que

$$
I_\lambda(\alpha u_0 + \beta u_{\mu,x_0}) \leq c_0 + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + \mu^{\frac{N-2}{4}}|u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}K_8 - \mu K_9 \tag{2.27}
$$

onde $K_9(\mu) > 0$.

Para $N \geq 7$, em (2.27), segue que $\dfrac{N-2}{4} > 1$ assim para $\mu > 0$ suficientemente pequeno tem-se

$$\mu^{\frac{N-2}{4}} |u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))} K_8 - \mu K_9 < 0$$

e consequentemente

$$I_\lambda(\alpha u_0 + \beta u_{\mu,x_0}) < c_0 + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}\ ,\ \forall\ \alpha, \beta \in [0, +\infty).$$

Para $N = 6$. Podemos considerar o ponto x_0 e a bola $B_\rho(x_0)$ próximo da fronteira de Ω, diminuindo $\rho > 0$, de tal modo que $|u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}$ seja tão pequeno quanto se queira, ou seja,

$$\mu |u_0|_{L^\infty(B_\rho(x_0))} K_8 - \mu K_9 < 0.$$

Portanto,

$$I_\lambda(\alpha u_0 + \beta u_{\mu,x_0}) < c_0 + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}\ ,\ \forall\ \alpha, \beta \in [0, +\infty).$$

Capítulo 3

Problema crítico exponencial

3.1 Desigualdade de Trudinger-Moser

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Pelo teorema de imersão contínua de Sobolev temos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)\ ,\ 1 \leq p \leq 2^*$$

ou, equivalentemente, utilizando a norma usual

$$||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.1}$$

em $H_0^1(\Omega)$ tem-se que

$$\sup_{||u|| \leq 1} \int_\Omega |u|^p < \infty \ \text{ para } \ 1 \leq p \leq 2^*. \tag{3.2}$$

No caso $N = 2$ a expressão (3.2) é válida para todo $1 \leq p \leq +\infty$. Sabendo que $H_0^1(\Omega) \nsubseteq L^\infty(\Omega)$ então a pergunta é: quais funções $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ com crescimento máximo satisfaz

$$\sup_{||u|| \leq 1} \int_\Omega g(u) < \infty.$$

Pohozhaev [24], Trudinger [32] e Moser [22] mostraram que o crescimento máximo de g é do tipo exponencial. Mais precisamente a desigualdade de

Trudinger-Moser estabelece, para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado

$$\int_\Omega e^{\alpha|u|^2} < \infty \ , \ \forall \ \alpha > 0 \ \text{ e } \ u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Além disso existe uma constante $c = c(|\Omega|, \alpha) > 0$ tal que

$$\sup_{||u|| \leq 1} \int_\Omega (e^{\alpha|u|^2} - 1) \leq c \tag{3.4}$$

para $\alpha \leq 4\pi$, ou ainda

$$\sup_{||u|| \leq 1} \int_\Omega e^{\alpha u^2} < \infty$$

para todo $\alpha \leq 4\pi$. Se $\alpha > 4\pi$ então o supremo em (3.4) é $+\infty$. O supremo em (3.4) torna-se infinito para domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com $|\Omega| = +\infty$ e portanto a desigualdade de Trudinger-Moser não é válida, a priori, em domínios ilimitados. Desigualdades do tipo Trudinger - Moser foram estudadas por Cao [10] e Tanaka [2] assumindo um crescimento exponencial subcrítico. Em [8], B. Ruf mostrou que trocando a norma de Dirichlet (3.1) pela norma de Sobolev

$$\begin{aligned} ||u||_S &= \left(||u||^2 + |u|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

em $H_0^1(\Omega)$ tem-se uma limitação do tipo (3.4) independente de Ω. Mais precisamente, existe uma constante $d > 0$ tal que para qualquer domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\sup_{||u||_S \leq 1} \int_\Omega (e^{4\pi u^2} - 1) \leq d. \tag{3.5}$$

A desigualdade é ótima: para $\alpha > 4\pi$ o supremo em (3.5) é $+\infty$.

A desigualdade de Trudinger-Moser motiva a seguinte noção de criticalidade:

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem crescimento crítico exponencial em $\pm\infty$ quando existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s \to \pm\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0 \ , & \forall \ \alpha > \alpha_0 \\ +\infty \ , & \forall \ \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

Agora vamos mostrar a existência de solução nodal de energia mínima para o problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \ , & \Omega \\ \quad u = 0 \ , & \partial\Omega \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Estamos interessados no caso em que a não-linearidade f pode ter um crescimento crítico exponencial. Mais precisamente, vamos supor as seguintes hipóteses:

(f_1) (Crescimento crítico exponencial)

Existe $c > 0$ tal que $|f(s)| \leq ce^{4\pi s^2}$, $\forall\ s \in \mathbb{R}$;

(f_2) (Comportamento próximo da origem)

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = 0;$$

(f_3) (Condição de Ambrosetti-Rabinowitz)

Existe $\theta > 0$ tal que

$$0 < \theta F(s) := \theta \int_0^s f(t)dt \leq sf(s) \ , \ \forall s \in \mathbb{R}\backslash\{0\};$$

(f_4) A função $s \mapsto \dfrac{f(s)}{|s|}$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$;

(f_5) Existem constantes $p > 2$ e $c_p > 0$ tais que

$$sgn(s)f(s) \geq c_p|s|^{p-1} \ , \ \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

Observação 3.1 *Uma consequência imediata de (f_5) é que*

$$F(s) \geq c_p\frac{|s|^p}{p} \ , \ \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

O principal resultado neste capítulo é o seguinte.

Teorema 3.2 *Suponha* (f_1)*-*(f_5) *válidas. Então o problema (3.6) tem uma solução nodal de energia mínima desde que*

$$c_p > \left[\frac{\theta(p-2)\beta_p}{p(\theta-2)}\right]^{\frac{p-2}{2}},$$

onde $\beta_p = \inf\left\{|u|_p^p; u^{\pm} \neq 0 \ \ e \ \ ||u^{\pm}||^2 = |u^{\pm}|_p^p\right\}$.

3.2 Funcional associado

Dado $\varepsilon > 0$, $q \geq 1$ e $\alpha > 4\pi$, das hipóteses (f_1) e (f_2), existe $C = C(\varepsilon, q, \alpha) > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C|s|^{q-1}e^{\alpha s^2} \ , \ \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

De fato, por (f_2), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $|s| < \delta_\varepsilon$ tem-se

$$|f(s)| < \varepsilon|s|. \tag{3.8}$$

Por outro lado, para $q \geq 1$, de (f_1) , temos que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|f(s)|}{e^{4\pi s^2}|s|^{q-1}} = 0,$$

ou seja, dado $\eta > 0$ existe $\delta_\eta > 0$ tal que

$$|f(s)| < \eta e^{4\pi s^2}|s|^{q-1} \ \text{ para } \ |s| > \delta_\eta. \tag{3.9}$$

Agora consideremos o conjunto

$$A = \{s \in \mathbb{R} : |s| < \delta_\varepsilon \ \text{ ou } \ |s| > \delta_\eta\}$$

e note que $A^c = \mathbb{R}\backslash A = \{s \in \mathbb{R} : \delta_\varepsilon \leq |s| \leq \delta_\eta\}$ é fechado e consequentemente compacto. Daí, pela continuidade de f temos que existe $C_1 > 0$ tal que $|f(s)| \leq C_1$ para todo $s \in A^c$.

Com isso podemos escolher $C_2 > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq C_2 e^{4\pi s^2} |s|^{q-1} \ , \ \forall \ s \in A^c. \tag{3.10}$$

Assim, de (3.9) e (3.10), tomando $C = \max\{\varepsilon, C_2\}$, tem-se

$$|f(s)| \leq C e^{4\pi s^2} |s|^{q-1} \ , \ \forall \ |s| \geq \delta_\eta. \tag{3.11}$$

Portanto, de (3.8) e (3.11), fazendo $\eta = \varepsilon$ obtemos

$$|f(s)| \leq \varepsilon |s| + C|s|^{q-1} e^{\alpha s^2} \ , \ \forall \ s \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente

$$|F(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{C}{q}|s|^q e^{\alpha s^2} \ , \ \forall \ s \in \mathbb{R}.$$

Pela desigualdade de Trudinger-Moser (3.3) temos que $F(u) \in L^1(\Omega)$ para todo $u \in H_0^1 \Omega$. Logo o funcional energia associado ao problema (3.6)

$$\begin{array}{rlll} I: & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto I(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u) \end{array}$$

está bem definido. E pelo estudo feito no Apêndice A temos que o funcional é de classe C^1 e

$$I'(u) \cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(u) v \ , \ \forall \ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Uma solução (fraca) do problema (3.6) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f(u) v \ , \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, pontos críticos do funcional energia I são soluções (fracas) do problema (3.6). Como sabemos, a aplicabilidade do método variacional depende da geometria do funcional associado ao problema e de alguma condição de compacidade, por exemplo, a condição de Palais-Smale. No caso de problemas com crescimento crítico exponencial o funcional energia não satisfaz, em geral, a condição de Palais-Smale em todo nível.

Sabemos que todos os pontos críticos não triviais de I pertencem a Variedade de Nehari:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} \mid I'(u)\cdot u = 0\} \\ &= \left\{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} \mid ||u||^2 = \int_\Omega f(u)u\right\}. \end{aligned}$$

Por estarmos interessados em solução nodal de energia mínima é natural definir o conjunto

$$\mathcal{M} = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u^{\pm} \in \mathcal{N}\}$$

e mostrar que existe $u_0 \in \mathcal{M}$ tal que

$$I(u_0) = c^* := \inf_{u\in\mathcal{M}} I(u) \;\text{ e }\; I'(u_0) = 0.$$

O Lema seguinte garante a existência de solução de energia mínima para o problema (3.6) desde que a constante c_p, dada na hipótese (f_5), seja suficientemente grande.

Lema 3.3 *Se*

$$c_p > \left[\frac{\theta(p-2)\beta_p}{p(\theta-2)}\right]^{\frac{p-2}{2}}, \tag{3.12}$$

então

$$c^* < \frac{\theta-2}{2\theta}.$$

Demonstração.

Considere o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u\,, & \Omega \\ u = 0\,, & \partial\Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $2 < p < 2^*$.

O funcional associado ao problema (3.13) é dado por

$$\begin{array}{rcl} I_p: & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto I_p(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 - \dfrac{1}{p}\int_\Omega |u|^p. \end{array}$$

Pelo estudo feito no Capítulo 1 tem-se que o funcional I_p está bem definido, é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I_p'(u)\cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega |u|^{p-2}uv \ , \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Pelo Teorema 1.9 e o Teorema 1.12 existe $w \in \mathcal{M}_p$ (ver Capítulo 1) tal que

$$I_p(w) = \inf_{u\in\mathcal{M}_p} I(u) \ \text{ e } \ I_p'(w) = 0$$

onde $\mathcal{M}_p = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u^\pm \in \mathcal{N}_p\}$.

Por $w^\pm \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, usando o Corolário 1.8 (ver Capítulo 1), existem $s, t > 0$ tais que

$$sw^+ + tw^- \in \mathcal{M}. \tag{3.14}$$

Segue, de (3.12), (3.14) e da Observação 3.1, que

$$\begin{aligned} c^* &\leq I(sw^+ + tw^-) = I(sw^+) + I(tw^-) \\ &= \frac{s^2}{2}||w^+||^2 - \frac{s^p}{p}\int_\Omega F(sw^+) + \frac{t^2}{2}||w^-||^2 - \frac{t^p}{p}\int_\Omega F(tw^-) \\ &\leq \frac{s^2}{2}||w^+||^2 - \frac{c_p s^p}{p}|w^+|_p^p + \frac{t^2}{2}||w^-||^2 - \frac{c_p t^p}{p}|w^-|_p^p \\ &\leq \left(\frac{s^2}{2} - \frac{c_p s^p}{p}\right)|w^+|_p^p + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{c_p t^p}{p}\right)|w^-|_p^p \\ &\leq \max_{r\geq 0}\left\{\frac{r^2}{2} - \frac{c_p r^p}{p}\right\}|w|_p^p \\ &\leq c_p^{\frac{2}{2-p}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\beta_p < \frac{\theta - 2}{2\theta}. \end{aligned}$$

Observação 3.4 *Por um cálculo simples mostra-se que*

$$\max_{r\geq 0}\left\{\frac{r^2}{2}-\frac{c_p r^p}{p}\right\} = c_p^{\frac{2}{2-p}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right).$$

■

O próximo Lema garante a existência de dois limites importantes envolvendo a não-linearidade.

Lema 3.5 *Seja* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $H_0^1(\Omega)$ *satisfazendo:*

(i) $b := \sup_{n\in\mathbb{N}} ||u_n||^2 < 1$*;*

(ii) $u_n \rightharpoonup u$ *em* $H_0^1(\Omega)$*;*

(iii) $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ *q.t.p em* Ω*.*

Então,

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_\Omega f(u_n)u_n &= \int_\Omega f(u)u \\
e \ \lim_n \int_\Omega f(u_n)v &= \int_\Omega f(u)v \ ,\forall\, v \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Demonstração.

Pela hipótese (f_1) temos que existe $c > 0$ tal que

$$|f(u_n(x))u_n(x)| \leq c|u_n(x)|\, e^{4\pi|u_n(x)|^2},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Afirmação:

$$|u_n|\, e^{4\pi|u_n|^2} \longrightarrow |u|\, e^{4\pi|u|^2} \ \text{ em } \ L^1(\Omega) \ \text{ quando } \ n \to +\infty. \tag{3.15}$$

De fato, sendo $||u_n||^2 \leq b$ para $\tau > 1$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |e^{4\pi|u_n|^2}|^\tau &= \int_\Omega e^{4\tau\pi||u_n||^2\left(\frac{|u_n|^2}{||u_n||^2}\right)} \\
&\leq \int_\Omega e^{4\tau\pi b\left(\frac{|u_n|^2}{||u_n||^2}\right)}.
\end{aligned}$$

Sendo $b < 1$, então podemos fixar $\tau > 1$ suficientemente próximo de 1 de tal modo que $b\tau < 1$. Sendo assim, pela desigualdade de Trudinger-Moser,

$$\sup_n \int_\Omega |e^{4\pi|u_n|^2}|^\tau \leq \sup_{||v||\leq 1} \int_\Omega e^{\alpha|v|^2} < \infty$$

onde $\alpha = 4\pi b\tau < 4\pi$. Logo a sequência $\{e^{4\pi|u_n|^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\tau(\Omega)$ e

$$e^{4\pi|u_n(x)|^2} \longrightarrow e^{4\pi|u(x)|^2} \quad \text{q.t.p em} \;\; \Omega,$$

então pelo Lema D.4 (ver Apêndice D)

$$e^{4\pi|u_n|^2} \rightharpoonup e^{4\pi|u|^2} \;\; \text{em} \;\; L^\tau(\Omega). \tag{3.16}$$

Por outro lado, usando a imersão compacta de Sobolev, temos

$$|u_n| \to |u| \;\; \text{em} \;\; L^{\tau'}(\Omega) \text{ quando } n \to +\infty \tag{3.17}$$

onde $\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{1}{\tau'} = 1$.

Segue, de (3.16), (3.17) juntamente com o Lema D.5 (ver Apêndice D), que o limite em (3.15) ocorre.

Portanto, usando o Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lebesgue (ver Apêndice D Teorema D.2) mostra-se que

$$\lim_n \int_\Omega f(u_n)u_n = \int_\Omega f(u)u.$$

Fazendo uso dos mesmos argumentos tem-se

$$\lim_n \int_\Omega f(u_n)v = \int_\Omega f(u)v \;, \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

■

O resultado abaixo é uma versão do Lema 1.4 (ver capítulo 1) para o caso em que a não-linearidade tem crescimento crítico exponencial.

Lema 3.6 *Existe uma constante $r_0 > 0$ tal que*

$$||u||^2 \geq r_0 > 0 \;, \;\; \forall\, u \in \mathcal{N}.$$

Demonstração.

Suponha, por contradição, que exista uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{N}$ tal que

$$||u_n||^2 \longrightarrow 0\ , \quad \text{quando}\ \ n \to +\infty. \tag{3.18}$$

Agora fixando $q > 2$ em (3.7) temos, pela imersões contínuas de Sobolev e desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned}
||u_n||^2 &= \int_\Omega f(u_n)u_n \\
&\leq \varepsilon \int_\Omega |u_n|^2 + c\int_\Omega |u_n|^q e^{\alpha|u_n|} \\
&\leq \varepsilon c_1||u||^2 + c\left(\int_\Omega |u_n|^{2q}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega e^{2\alpha|u_n|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \varepsilon c_1||u||^2 + c|u_n|_{2q}^q \left(\int_\Omega e^{2\alpha|u_n|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \varepsilon c_1||u||^2 + c_2||u_n||^q \left(\int_\Omega e^{2\alpha|u_n|^2}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Agora fixando $\varepsilon < \dfrac{1}{c_1}$ temos

$$0 < c_3 := \frac{1-\varepsilon c_1}{c_2} \leq ||u_n||^{q-2}\left(\int_\Omega e^{2\alpha|u_n|^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.19}$$

Por (3.18) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2\alpha||u_n||^2 \leq 4\pi\ ,\ \forall\, n \geq n_0.$$

Daí, pela desigualdade de Trudinger-Moser, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{2\alpha|u_n|^2} &= \int_\Omega e^{2\alpha||u_n||^2 \frac{|u_n|^2}{||u_n||^2}} \\
&\leq \int_\Omega e^{4\pi\left(\frac{|u_n|^2}{||u_n||^2}\right)} \\
&\leq \sup_{||v||\leq 1} \int_\Omega e^{4\pi v^2} := k < \infty
\end{aligned}$$

Portanto, de (3.19) para $n \geq n_0$

$$0 < c_3 \leq ||u_n||^{q-2} \, (k)^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$0 < \left(\frac{c_3}{(k)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{q-2}} \leq ||u_n||^2$$

o que contradiz (3.18). ■

Corolário 3.7 *Se $u \in \mathcal{M}$, então*

$$||u||, ||u^{\pm}|| \geq r_0 > 0.$$

Corolário 3.8 *Existe $\delta_2 > 0$ tal que*

$$I(u), I(u^{\pm}) \geq 2\delta_2 \;\forall\; u \in \mathcal{M}.$$

Demonstração.

Note que se $v \in \mathcal{N}$, então

$$I(v) = I(v) - \frac{1}{\theta} I'(v) \cdot v = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) ||v||^2 - \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} (\theta F(v) - f(v)v).$$

Logo, pela condição (f_3) e do Lema 3.6, temos

$$I(v) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) ||v||^2 \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) r_0 := 2\delta_2.$$

Portanto, o resultado segue observando que se $u \in \mathcal{M}$ então $u, u^{\pm} \in \mathcal{N}$. ■

Agora, para $\lambda > 0$, consideremos o conjunto

$$\tilde{S}_{\lambda} = \{u \in \mathcal{M} | \; I(u) < c^* + \lambda\}.$$

Por definição de c^* temos que $\tilde{S}_{\lambda}$ é não vazio.

Segue alguns resultados envolvendo o conjunto $\tilde{S}_{\lambda}$.

Lema 3.9 *Para todo* $u \in \tilde{S}_\lambda$

$$0 < r_0 \leq ||u^{\pm}||^2 \leq ||u||^2 < r_\lambda$$

para algum $r_\lambda \in (0,1)$ *e* $\lambda > 0$ *suficientemente pequeno.*

Demonstração.

Sendo $\tilde{S}_\lambda \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, pelo Corolário 3.7, é suficiente mostrar que existe $r_\lambda \in (0,1)$ tal que $||u^{\pm}||^2 \leq ||u||^2 < r_\lambda$ para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

Note que, pela condição de Ambrosetti-Rabinowitz, se $u \in \tilde{S}_\lambda$

$$\begin{aligned} c^* + \lambda &> I(u) - \frac{1}{\theta} I'(u) \cdot u \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) ||u||^2 + \frac{1}{\theta}\left[\int_\Omega f(u)u - \theta F(u)\right] \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) ||u||^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.3, podemos fixar $\lambda > 0$ suficientemente pequeno tal que $c^* + \lambda \leq \dfrac{\theta - 2}{2\theta}$. Portanto,

$$||u||^2 < \frac{2\theta(c^* + \lambda)}{\theta - 2} := r_\lambda < 1 \ , \ \forall\, u \in \tilde{S}_\lambda.$$

■

O próximo lema é fundamental para garantir que o limite fraco de uma sequência de Palais-Smale em $\tilde{S}_\lambda$ é uma função nodal.

Proposição 3.10 *Para cada* $q > 2$*, existe* $\delta_q > 0$ *tal que*

$$0 < \delta_q \leq \int_\Omega |u^{\pm}|^q \leq \int_\Omega |u|^q \ , \ \forall\, u \in \tilde{S}_\lambda.$$

Demonstração.

Seja $u \in \tilde{S}_\lambda \subset \mathcal{M}$, então

$$||u^{\pm}||^2 = \int_\Omega f(u^{\pm})u^{\pm}$$

e por (f_1)

$$||u^{\pm}||^2 \leq c \int_{\Omega} |u^{\pm}| e^{4\pi |u^{\pm}|^2}.$$

Usando imersão contínua de Sobolev e desigualdade de Hölder,

$$||u^{\pm}||^2 \leq c \left(\int_{\Omega} |u^{\pm}|^{t_1} \right)^{\frac{1}{t_1}} \left(\int_{\Omega} e^{4t_2\pi |u^{\pm}|^2} \right)^{\frac{1}{t_2}}$$

onde $\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = 1$. Pelo Corolário 3.7 existe $r_0 > 0$ tal que

$$r_0 \leq c \left(\int_{\Omega} |u^{\pm}|^{t_1} \right)^{\frac{1}{t_1}} \left(\int_{\Omega} e^{4t_2\pi ||u^{\pm}||^2 \left(\frac{|u^{\pm}|^2}{||u^{\pm}||^2} \right)} \right)^{\frac{1}{t_2}}$$

e pelo Lema 3.9 existe $r_\lambda \in (0,1)$ tal que $||u^{\pm}||^2 \leq r_\lambda$ e assim

$$r_0 \leq c \left(\int_{\Omega} |u^{\pm}|^{t_1} \right)^{\frac{1}{t_1}} \left(\int_{\Omega} e^{4t_2\pi r_\lambda \left(\frac{|u^{\pm}|^2}{||u^{\pm}||^2} \right)} \right)^{\frac{1}{t_2}}.$$

Note que, sendo $r_\lambda < 1$, podemos fixar $t_2 > 1$ próximo de 1 de tal modo que $t_2 r_\lambda < 1$ e $t_1 > 2$. Daí, pela desigualdade de Trudinger-Moser, existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} e^{4t_2\pi r_\lambda \left(\frac{|u^{\pm}|^2}{||u^{\pm}||^2} \right)} \leq \tilde{C} \ , \ \forall\, u \in \tilde{S}_\lambda.$$

Logo para alguma constante $C_1 > 0$ obtemos

$$C_1 \leq |u^{\pm}|_{t_1} \ , \ \forall\, u \in \tilde{S}_\lambda. \tag{3.20}$$

Agora suponha, por contradição, que exista $q_0 > 2$ e uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{S}_\lambda$ tal que

$$|u_n^{\pm}|_{q_0} \to 0 \ , \ \text{quando} \ \ n \to +\infty.$$

Observe que, pelo Lema 3.9 e por imersão contínua de Sobolev, temos que, para cada $s > 2$, $\{u_n^{\pm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^s(\Omega)$. Logo para cada $s > 2$, pelo Lema D.7, temos

$$|u_n^{\pm}|_s \to 0 \ , \ \text{quando} \ \ n \to +\infty,$$

o que contradiz (3.20). ■

O próximo Lema será crucial para garantimos que, para uma escolha adequada de um número real $R > 1$, o conjunto

$$S = \left\{ sRu^+ + tRu^- \mid u \in \tilde{S}_\lambda \text{ e } s, t \in \left[\frac{1}{R}, 1\right] \right\}$$

tem uma sequência $(PS)_{c^*}$ de funções nodais para o funcional I.

Lema 3.11 *Existe $R > 0$ tal que*

$$I(R^{-1}u^\pm), I(Ru^\pm) < \frac{1}{2} I(u^\pm), \ \forall \, u \in \tilde{S}_\lambda.$$

Demonstração.

Sejam $u \in \tilde{S}_\lambda$ e $R > 0$. Por (f_3) temos que

$$I(R^{-1}u^\pm) = \frac{1}{2R^2}||u^\pm||^2 - \int_\Omega F(R^{-1}u^\pm) \leq \frac{1}{2R^2}||u^\pm||^2.$$

Pelo Lema 3.9

$$\frac{1}{2R^2}||u^\pm||^2 \leq \frac{r_\lambda}{2R^2} < \delta_2$$

para $R > 0$ suficientemente grande. Assim pelo Corolário 3.8

$$I(R^{-1}u^\pm) < \delta_2 \leq \frac{1}{2} I(u^\pm) \ , \ \forall \, u \in \tilde{S}_\lambda.$$

Agora pela condição (f_3), mais precisamente pelo Lema A.2 Apêndice A, existem constantes $c_1 > 0$ $c_2 > 0$ tais que

$$F(t) \geq c_1 |t|^\theta - c_2 |t|^2 \ , \ \forall \, t \in \mathbb{R}$$

de onde segue que

$$I(Ru^\pm) = \frac{R^2}{2}||u||^2 - \int_\Omega F(Ru^\pm) \leq \frac{R^2}{2} r_\lambda - c_1 R^\theta |u^\pm|_\theta^\theta + c_2 R^2 |u^\pm|_2^2.$$

Pela Proposição 3.10, existe $\delta_\theta > 0$ tal que

$$|u^\pm|_\theta^\theta \geq \delta_\theta.$$

Com isso, pela imersão contínua de Sobolev $H_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e novamente pelo Lema 3.9, temos

$$I(Ru^{\pm}) = \frac{R^2}{2}||u||^2 - \int_\Omega F(Ru^{\pm}) \leq \frac{R^2}{2} r_\lambda - c_1 R^\theta \delta_\theta + c_2 R^2 r_\lambda.$$

Sendo $\theta > 2$, concluímos que

$$I(Ru^{\pm}) < 0 < \delta_2 \leq \frac{1}{2} I(u^{\pm}) \ , \ \forall \ u \in \tilde{S}_\lambda,$$

para R suficientemente grande. ■

Seja P o cone das funções não negativas de $H_0^1(\Omega)$ definido por

$$P = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \geq 0, \text{ q.t.p em } \Omega\}$$

e considere o conjunto

$$\Lambda = P \cup (-P).$$

Lema 3.12 $d_0 = dist(S, \Lambda) > 0$.

Demonstração.

De fato, caso contrário existem sequências $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ e $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ tais que

$$||w_n - v_n|| \longrightarrow 0 \ , \ \text{ quando } \ n \to +\infty. \tag{3.21}$$

Note que $w_n = Rs_n u_n^+ + Rt_n u_n^-$ com $s_n, t_n \in \left[\frac{1}{R}, 1\right]$ e $u_n \in \tilde{S}_\lambda$. Facilmente, usando a condição (f_3), mostra-se que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Daí, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Então, pela imersão compacta de Sobolev e a Proposição 3.10, $u_n^{\pm}(x) \to u_0^{\pm}(x)$ q.t.p em Ω, quando $n \to +\infty$ e $u_0^{\pm} \neq 0$. Com isso existem $s_0, t_0 \in \left[\frac{1}{R}, 1\right]$ tais que

$$w_n(x) = Rs_n u_n^+(x) + Rt_n u_n^-(x) \longrightarrow Rs_0 u_0^+(x) + Rt_0 u_0^-(x) \ , \ \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

Por outro lado, de (3.21) e pelo fato de que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, segue que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Com isso temos que $v_n(x) \to v_0(x)$ q.t.p em Ω quando $n \to +\infty$. E pela unicidade de limite

$$v_n(x) \longrightarrow Rs_0u^+(x) + Rt_0u^-(x)\ , \quad \text{q.t.p em } \ \Omega.$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $v_n(x) \geq 0\ ,\ \forall\, x \in \Omega$, chegamos a uma contradição. ■

3.3 Existência de uma sequência $(PS)_{c^*}$

A Proposição a seguir garante a existência de uma sequência $(PS)_{c^*}$.

Teorema 3.13 *Dados $\varepsilon, \delta > 0$, existe $u \in I^{-1}([c^* - 2\varepsilon, c^* + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$ tal que*

$$||I'(u)|| \leq \frac{4\varepsilon}{\delta}$$

onde $S_{2\delta} = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid dist(u, S) \leq 2\delta\}$.

Demonstração.

Suponha que existam $\varepsilon_0, \delta_0 > 0$ tais que

$$||I'(u)|| \geq \frac{4\varepsilon_0}{\delta_0}\ ,\quad \forall\, u \in I^{-1}([c^* - 2\varepsilon_0, c^* + 2\varepsilon_0]) \cap S_{2\delta_0}.$$

Assim para cada $n \in \mathbb{N}$

$$||I'(u)|| \geq \frac{4\varepsilon_0/n}{\delta_0/n}\ ,\quad \forall\, u \in I^{-1}([c^* - 2\varepsilon_0, c^* + 2\varepsilon_0]) \cap S_{2\delta_0}.$$

Sendo

$$I^{-1}([c^* - 2\varepsilon_0/n, c^* + 2\varepsilon_0/n]) \cap S_{2\delta_0/n} \subset I^{-1}([c^* - 2\varepsilon_0, c^* + 2\varepsilon_0]) \cap S_{2\delta_0},$$

tem-se

$$||I'(u)|| \geq \frac{4\varepsilon_0/n}{\delta_0/n}\ ,\quad \forall\, u \in I^{-1}([c^* - 2\varepsilon_0/n, c^* + 2\varepsilon_0/n]) \cap S_{2\delta_0/n}.$$

Agora fixe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de tal modo que

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{n} \leq \min\left\{\lambda, \frac{2\delta_2}{5}\right\} > 0\ ,\ \delta = \frac{\delta_0}{n} < \frac{d_0}{2} \tag{3.22}$$

onde $\delta_2 > 0$ é proveniente do Corolário 3.8 e d_0 do Lema 3.12. Daí,

$$||I'(u)|| \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}\ ,\ \ \forall\, u \in I^{-1}([c^* - 2\varepsilon, c^* + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}.$$

Pelo Lema da Deformação (ver Willem [34]) existe $\eta \in C([0,1]\times H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$ tal que

(a) $\eta(1,u) = u\ ,\ \forall\, u \notin I^{-1}([c^* - 2\varepsilon, c^* + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;

(b) $\eta(1, I^{c^*+\varepsilon} \cap S_{2\delta}) \subset I^{c^*-\varepsilon}$;

(c) $||\eta(1,u) - u|| \leq \delta\ ,\ \forall u \in H_0^1(\Omega)$.

Por definição existe $u_* \in \mathcal{M}$ tal que $I(u_*) < c^* + \dfrac{\varepsilon}{2}$. E pela escolha feita do $\varepsilon > 0$ em (3.22) obtemos $u_* \in \tilde{S}_\lambda$.

Seja $D = \left[\dfrac{1}{R}, 1\right] \times \left[\dfrac{1}{R}, 1\right]$ e defina a aplicação

$$\begin{aligned} g:\quad & D \quad \longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ & (s_1, s_2) \ \longmapsto g(s_1,s_2) = s_1 R u_*^+ + s_2 R u_*^-. \end{aligned}$$

Por $u_*^\pm \in \mathcal{N}$ e pela escolha feita de $\varepsilon > 0$ em (3.22), então

$$I(s_1 R u_*^+ + s_2 R u_*^-) \leq I(u_*) < c^* + \frac{\varepsilon}{2} < c^* + \lambda\ ,\ \forall\, (s_1,s_2) \in D$$

mostrando que $s_1 u_*^+ + s_2 u_*^- \in I^{c^*+\varepsilon}$ e $s_1 u_*^+ + s_2 u_*^- \in S$ e consequentemente $dist(s_1 u_*^+ + s_2 u_*^-, S) = 0 < 2\delta$. Portanto, $s_1 u_*^+ + s_2 u_*^- \in I^{c^*+\varepsilon} \cap S_{2\delta}$.

Assim para $(s_1,s_2) \in D$, pelo item (b), $\eta(1, g(s_1,s_2)) \in I^{c^*-\varepsilon}$, isto é, $I(\eta(1, g(s_1,s_2))) \leq c^* - \varepsilon$ mostrando que

$$\max I(\eta(1, g(s_1,s_2))) < c^*,\ \ (s_1,s_2) \in D. \tag{3.23}$$

Afirmação: $\eta(1, g(D)) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$, ou seja, existe $(s_0, t_0) \in D$ tal que

$$\eta(1, g(s_0, t_0)) \in \mathcal{M}.$$

Segue, da afirmação e de (3.23), que

$$c^* \leq I(\eta(1, g(s_0, t_0))) \leq \max I(\eta(1, g(s_1, s_2))) < c^*, \quad (s_1, s_2) \in D$$

o que é um absurdo. Portanto, a menos da prova da afirmação, concluímos a demonstração.

Prova da Afirmação.

Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} h: \quad D & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \\ (s_1, s_2) & \longmapsto & h(s_1, s_2) = \eta(1, g(s_1, s_2)). \end{array}$$

Note que, por definição, $h(s_1, s_2) \in \eta(1, g(D))$ para $(s_1, s_2) \in D$. Para concluir a prova da afirmação é suficiente mostrar que existe $(s_0, t_0) \in D$ tal que $h^{\pm}(s_0, t_0) \neq 0$ e $I'(h^{\pm}(s_0, t_0)) \cdot h^{\pm}(s_0, t_0) = 0$. Primeiramente notemos que $h^{\pm} \neq 0$. Seja $z \in \Lambda$, usando o item (c) o Lema 3.12 e a escolha feita do $\delta > 0$ em (3.22), para $(s_1, s_2) \in D$

$$\begin{aligned} ||\eta(1, g(s_1, s_2)) - z|| &\geq ||g(s_1, s_2) - z|| - ||\eta(1, g(s_1, s_2)) - g(s_1, s_2)|| \\ &\geq d_0 - \delta > d_0 - \frac{d_0}{2} = \frac{d_0}{2} > 0. \end{aligned}$$

Agora mostraremos que existe $(s_0, t_0) \in D$ tal que

$$I'(h^{\pm}(s_0, t_0)) \cdot h^{\pm}(s_0, t_0) = 0.$$

Para isto defina $\psi_0, \psi_1 : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ da seguinte forma

$$\psi_0(s_1, s_2) = (I'(s_1 R u_*^+) \cdot s_1 R u_*^+, I'(s_2 R u_*^-) \cdot s_2 R u_*^-)$$

$$\psi_1(s_1, s_2) = (I'(h^+(s_1, s_2)) \cdot h^+(s_1, s_2), I'(h^-(s_1, s_2)) \cdot h^-(s_1, s_2)).$$

Pela geometria da aplicação $t \longmapsto I(tw^{\pm})$ $(t \geq 0)$ e por $R > 1$, temos que

(i) $I'\left(\frac{1}{R}u_*^{\pm}\right) \cdot \left(\frac{1}{R}u_*^{\pm}\right) > 0$;

(ii) $I'(Ru_*^{\pm}) \cdot (Ru_*^{\pm}) < 0$.

Aplicando a definição do grau topológico em $\mathbb{R}$ (ver Apêndice C Definição C.1) para função a contínua

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \left[\frac{1}{R^2}, 1\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s_1 & \longmapsto & f_1(s_1) = I'(s_1 R u_*^+) \cdot s_1 R u_*^+ \end{array}$$

obtemos

$$d\left(f_1, \left[\frac{1}{R^2}, 1\right], 0\right) = sgn\left(-f_1\left(\frac{1}{R^2}\right)\right) = (-1).$$

De maneira análoga considerando

$$\begin{array}{rcl} f_2 : \left[\frac{1}{R^2}, 1\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s_1 & \longmapsto & f_2(s_1) = I'(s_1 R u_*^+) \cdot s_1 R u_*^+ \end{array}$$

obtemos

$$d\left(f_2, \left[\frac{1}{R^2}, 1\right], 0\right) = sgn\left(-f_2\left(\frac{1}{R^2}\right)\right) = (-1).$$

Segue da Proposição C.2 (ver Apêndice C) que

$$d(\psi_0, D, (0,0)) \;=\; (-1) \cdot (-1) = 1 \neq 0.$$

Observe que

$$h := \eta(1, g(\partial D)) = g(\partial D).$$

De fato, sejam $s_1 = \frac{1}{R^2}$ e $s_2 \in \left[\frac{1}{R^2}, 1\right]$. Pelo Lema 3.11

$$\begin{aligned} I(s_1 R u_*^+ + s_2 R u_*^-) &= I\left(\frac{1}{2} R u_*^+\right) + I(s_2 R u_*^-) \\ &< \frac{1}{2} I(u_*^+) + I(u_*^-) \\ &= I(u_*) - \frac{1}{2} I(u_*^+). \end{aligned}$$

Daí, pelo Corolário 3.8 e pela escolha de $\varepsilon > 0$ feita em (3.22), obtemos

$$I(s_1Ru_*^+ + s_2Ru_*^-) < c^* + \frac{\varepsilon}{2} - \delta_2 < c^* - 2\varepsilon,$$

ou seja,

$$\frac{1}{R}u_*^+ + tRu_*^- \notin I^{-1}([c^* - 2\varepsilon, c^* + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}\ ,\ \forall\ s_2 \in \left[\frac{1}{R^2}, 1\right]$$

Logo pelo item (a)

$$h\left(\frac{1}{R^2}, s_2\right) = \eta\left(1, \frac{1}{R}u_*^+ + s_2Ru_*^-\right) = \frac{1}{R}u_*^+ + s_2Ru_*^- = g\left(\frac{1}{R^2}, s_2\right).$$

Os demais casos são similares. Assim $h \equiv g$ sobre ∂D. Portanto,

$$h(s_1, s_2)^+ = sRu_*^+ \ \text{ e } \ h(s_1, s_2)^- = sRu_*^-\ ,\ \forall\ (s_1, s_2) \in \partial D.$$

Pela dependência da fronteira do Grau de Brouwer (ver Apêndice C Proposição C.3),

$$d(\psi_1, D, (0,0)) = d(\psi_0, D, (0,0)) = (-1) \neq 0.$$

Sendo assim, pela propriedade de existência de solução para o grau de Brouwer (ver Apêndice C Proposição C.4), existe $(s_0, t_0) \in D$ tal que $\psi_1(s_0, t_0) = (0, 0)$, ou seja.

$$I'(h^+(s_1, s_2)) \cdot h^+(s_1, s_2) = 0 \ \text{ e } \ I'(h^-(s_1, s_2)) \cdot h^-(s_1, s_2) = 0.$$

Portanto,

$$\eta(1, g(s_0, t_0)) \in \eta(1, g(D)) \cap \mathcal{M}.$$

■

Demonstração. Teorema 3.2

Seja $\varepsilon = \dfrac{1}{4n}$ e $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, então pelo Teorema 3.13 existe

$$u_n \in I^{-1}\left(\left[c^* - \frac{1}{2n}, c^* + \frac{1}{2n}\right]\right) \cap S_{\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

tal que

$$||I'(u_n)|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $u_n \in S_{\frac{2}{\sqrt{n}}}$, então existe $v_n \in S$ tal que

$$dist(u_n v_n) \leq \frac{2}{\sqrt{n}}. \tag{3.24}$$

Sendo $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, $I(u_n) \to c^*$, para $n \to +\infty$, e por (3.24), temos que

$$I(v_n) \to c^* \ \text{ e } \ I'(v_n) \to 0 \ , \ \text{quando} \ \ n \to +\infty.$$

Em resumo $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ é uma sequência $(PS)_{c^*}$ de funções nodais para I.

Agora para cada $n \in \mathbb{N}$ segue que $I'(v_n) \cdot v_n = o_n(1)$. Seja $\theta > 2$ dado na condição (f_3)

$$\begin{aligned}
c^* + o_n(1) &= I(v_n) - \frac{1}{\theta} I'(v_n) \cdot v_n \\
&= \frac{1}{2}||v_n||^2 - \int_\Omega F(v_n) - \frac{1}{\theta}||v_n||^2 + \frac{1}{\theta}\int_\Omega f(v_n)v_n \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||v_n||^2 + \frac{1}{\theta}\int_\Omega [f(v_n)v_n - \theta F(v_n)] \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||v_n||^2
\end{aligned}$$

pelo Lema 3.3

$$||v_n||^2 \leq c^* \frac{2\theta}{\theta - 2} + o_n(1) < 1 + o_n(1).$$

Com isso

$$\limsup_n ||v_n||^2 < 1. \tag{3.25}$$

Segue que $v_n \rightharpoonup v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Então, pelo Lema 3.5, dado $v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq |I'(v_0)\cdot v| &= \left|\int_\Omega \nabla v_0 \nabla v - \int_\Omega f(v_0)v\right| \\ &= \lim_n \left|\int_\Omega \nabla v_n \nabla v - \int_\Omega f(v_n)v\right| \\ &= \lim_n |I'(v_n)\cdot v| \\ &\leq \lim_n ||I'(v_n)||\ ||v|| \to 0\ , \quad \text{quando}\ \ n \to +\infty. \end{aligned}$$

Mostrando que v_0 é solução fraca do problema (3.6).

Agora vamos mostrar que $v_0^{\pm} \neq 0$. De fato, sabemos que

- $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$;
- $v_n \to v_0$ em $L^s(\Omega)$ para $s \in [1, 2^*)$;
- $v_n(x) \to v_0(x)$ q.t.p em Ω.

Além disso $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$, então existem $s_n, t_n \in [a,b]$ e $u_n \in \tilde{S}_\lambda$ tais que $v_n = s_n u_n^+ + t_n u_n^-$. Logo por Bolzano Weierstrass, a menos de subsequência, $s_n \to s_0$ e $t_n \to t_0$ para algum $s_0, t_0 \in [a,b]$. Por outro lado, pelo Lema 3.9 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ e consequentemente $u_n^{\pm} \rightharpoonup u_0^{\pm}$ em $H_0^1(\Omega)$, ou seja,

$$v_n(x) \to s_0 u_0^+(x) + t_0 u_0^-(x) \ \ \text{q.t.p em} \ \ \Omega.$$

Pela unicidade do limite segue que

$$v_0(x) = s_0 u_0^+(x) + t_0 u_0^-(x) \ \ \text{q.t.p em} \ \ \Omega.$$

Pela imersão compacta de Sobolev e pela Proposição 3.10 temos que

$$\int_\Omega |u^{\pm}|^q \geq \delta_q > 0$$

para $q \in [2, 2^*]$ arbitrário. Portanto,

$$v_0^+ = s_0 u_0^+ \neq 0 \text{ e } v_0^- = t_0 u_0^- \neq 0$$

mostrando que v_0 é uma solução nodal para o problema (3.6). Por $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ser uma sequência $(PS)_{c^*}$ e juntamente com uma versão do Lema 3.5 para F tem-se

$$I(v_0) = \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u).$$

■

Capítulo 4

Conjuntos invariantes por fluxo decrescente

Este capítulo foi baseado e desenvolvido a partir do estudo do artigo de Zhaoli Liu e Jingxian Sun [21]. Em condições adequadas, mostra-se a existência de pelo menos quatro pontos críticos de um funcional onde cada ponto crítico pertence a um determinado conjunto invariante. Os resultados teóricos são aplicados aos problemas elípticos não lineares com valores de fronteira e aos sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares. Assim o estudo de conjuntos invariantes por fluxo decrescente nos fornece ferramentas para que possamos obter solução positiva, negativa e nodal.

Esta teoria será crucial no estudo do capítulo seguinte para mostrar a existência de três soluções, uma positiva, uma negativa e outra solução que muda de sinal no caso subcrítico de Sobolev em $\mathbb{R}^N$ (não autônomo) [6].

No que segue X é um espaço de Banach e $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Denotaremos por K o conjunto de todos os pontos críticos do funcional J, ou seja, $K = \{u \in X \mid J'(u) = 0\}$. Além disso, considere $X_0 = X \backslash K$.

Definição 4.1 *Dizemos que uma aplicação* $W : X \longrightarrow X$ *é um campo*

pseudo-gradiente *para* J *quando* $W|_{X_0}$: $X_0 \to X$ *é localmente Lipschitz e as condições abaixo são satisfeita:*

(i) $\langle J'(u), W(u)\rangle \geq \frac{1}{2}||J'(u)||^2$ *para todo* $u \in X$*;*

(ii) $||W(u)|| \leq 2||J'(u)||$ *para todo* $u \in X$*.*

Exemplo 4.2 *Seja* X *um espaço de Hilbert e* $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma aplicação de classe* C^1*, com derivada localmente Lipschitziana. Então,* $\nabla\phi : X_0 \longrightarrow X$ *é um campo* ***pseudo-gradiente****.*

Lema 4.3 ***(Existência de um campo pseudo-gradiente)***
Sejam X *um espaço de Banach e* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$*, então existe um campo* ***pseudo-gradiente*** $W : X_0 \longrightarrow X$ *para o funcional* J*.*

Demonstração. Ver [34]. ∎

Seja $W(u)$ um campo **pseudo-gradiente** de vetores para J e $u_0 \in X_0$. Agora considere o (P.V.I) de Cauchy em X_0

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = -W(u(t)) \ , \quad t \geq 0 \\ \qquad\qquad u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Pela teoria de E.D.O em espaço de Banach (ver [15]), o problema (4.1) tem uma **única** solução $u(t, u_0)$ onde $[0, T(u_0))$ é o intervalo maximal de existência, à direita, da solução. O conjunto

$$\{u(t, u_0); t \in [0, T(u_0))\}$$

é chamada de **órbita** que passa por u_0. Observe que podemos ter $T(u_0) = +\infty$.

Observação 4.4 *A aplicação* $t \mapsto J(u(t, u_0))$ *é decrescente em* $[0, T(u_0))$*. De fato, fazendo uso da definição de solução do problema (4.1) e do item (i)* *na definição de campo **pseudo-gradiente**, obtemos*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(u(t,u_0)) &= \left\langle J'(u(t,u_0)), \frac{d}{dt}u(t,u_0)\right\rangle \\
&= -\left\langle J'(u(t,u_0)), W(u(t,u_0))\right\rangle \\
&\leq -\frac{1}{2}||J'(u)||^2 < 0.
\end{aligned}$$

*Por esta razão a função $t \mapsto u(t,u_0)$, $t \in [0,T(u_0))$, é dita uma **curva de fluxo decrescente**.*

Definição 4.5 *Um subconjunto $M \subset X$, não vazio, é dito um **conjunto invariante de fluxo decrescente (c.i.f.d)**, para J determinado por W, se*

$$\{u(t,u_0); t \in [0,T(u_0))\} \subset M$$

para todo $u_0 \in M \backslash K$, isto é, as orbitas que iniciam em M permanecem em M.

Observação 4.6 *De agora em diante, por questão de simplicidade, diremos apenas (c.i.f.d) em vez de Conjunto Invariante de Fluxo Decrescente para J determinado por W.*

Exemplo 4.7 *Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, os conjuntos de nível*

$$J^a = \{u \in X; J(u) \leq a\} \ \text{ e } \ J_0^a = \{u \in X; J(u) < a\}$$

são ambos (c.i.f.d).

Com efeito, seja $w_0 \in J^a$, então $J(w_0) \leq a$ e sendo a aplicação $t \mapsto J(u(t,w_0))$ decrescente em $[0,T(w_0))$ temos que

$$J(u(t,w_0)) \leq J(w_0) \leq a \ \text{ para todo } \ t \in [0,T(w_0))$$

mostrando que

$$\{u(t,w_0); t \in [0,T(w_0))\} \subset J^a.$$

De forma análoga mostra-se que J_0^a é um (c.i.f.d).

Proposição 4.8 *Sejam D_1 e D_2 (c.i.f.d), então $D_1 \cap D_2$ é um (c.i.f.d) para J.*

Demonstração.

Dado $v \in D_1 \cap D_2$ temos $v \in D_1$ e $v \in D_2$. Sendo D_1 e D_2 (c.i.f.d) então

$$\{u(t,v); t \in [0,T(v))\} \subset D_1 \ \text{ e } \ \{u(t,v); t \in [0,T(v))\} \subset D_2,$$

ou seja,

$$\{u(t,v); t \in [0,T(v))\} \subset D_1 \cap D_2.$$

■

Proposição 4.9 *Seja D conexo e um (c.i.f.d), então o conjunto $\overline{D}$ é fechado, conexo e um (c.i.f.d).*

Demonstração.

Por resultados de Topologia temos que $\overline{D}$ é fechados e conexo. Sendo D um (c.i.f.d), então é suficiente mostrar que dado $v_0 \in \partial D$ tem-se que

$$\{u(t,v_0); t \in [0,T(v_0))\} \subset \overline{D}.$$

Suponha que exista $t' \in [0,T(v_0))$ tal que $u(t',v_0) \notin \overline{D}$, isto é, $u(t',v_0) \in X \backslash \overline{D}$. Sendo $\overline{D}$ fechado então $X \backslash \overline{D}$ é aberto, logo existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(u(t',v_0)) \subset X \backslash \overline{D}$.

Pela dependência contínua do fluxo existe uma vizinhança B_ε de v_0 tal que, para cada $v \in B_\varepsilon(v_0)$ tem-se que $u(\bar{t},v_0) \in B_\delta(u(t',v_0))$ para algum $\bar{t} \in (0,T(v))$.

Por $v_0 \in \partial D$ tem-se que existe $v^* \in D \cap B_\varepsilon(v_0)$, e pela dependência contínua, $u(t^*,v^*) \in B_\delta(u(t',v_0) \subset X \backslash \overline{D}_i$ para algum $t^* \in (0,T(v^*))$ o que é um absurdo já que D é um (c.i.f.d). ■

4.1 Existência de pontos críticos

A partir de agora exibiremos resultados que, através de (c.i.f.d) fechados, garantem a existência de pontos críticos para o funcional J.

Definição 4.10 *O funcional J satisfaz a **Condição de Palais-Smale** em M, denotada simplesmente por (PS) em M, se dada qualquer sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $\{J(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e $J'(u_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$ tem-se que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente.*

Teorema 4.11 *Sejam M um (c.i.f.d) fechado em X e J satisfazendo a condição (PS) em M. Se*

$$c := \inf_{u\in M} J(u) > -\infty,$$

então c é um valor crítico para J em M.

Demonstração.

Primeiramente vamos mostrar que dado $u_0 \in M\backslash K$ existe $u^* \in M \cap K$ tal que

$$c \leq J(u^*) \leq J(u_0).$$

Com efeito, fixado $u_0 \in M\backslash K$ temos que $\{u(t, u_0); t \in [0, T(u_0))\} \subset M$ uma vez que M é um (c.i.f.d). Sendo a aplicação $t \mapsto J(u(t, u_0))$ decrescente para $t \in [0, T(u_0))$, então

$$c \leq J(u(t, u_0)) \leq J(u_0). \tag{4.2}$$

Por outro lado, pela definição de solução do P.V.I em (4.1), definição de campo pseudo-gradiente e desigualdade de Hölder, tem-se que para quaisquer $0 \leq t_1 < t_2 < T(u_0)$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} u(t, u_0)\, dt \right\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} -W(u(t, u_0))\, dt \right\| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} ||W(u(t, u_0))|| dt \\ &\leq 2 \int_{t_1}^{t_2} ||J'(u(t, u_0))||\, dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\left[\int_{t_1}^{t_2} ||J'(u(t,u_0))||^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{t_1}^{t_2} 1\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\left[\int_{t_1}^{t_2} 2\left\langle J'(u), W(u)\right\rangle\, dt\right]^{\frac{1}{2}} [t_2 - t_1]^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\left[\int_{t_1}^{t_2} -2\left\langle J'(u), \frac{d}{dt}u(t,u_0)\right\rangle\, dt\right]^{\frac{1}{2}} [t_2 - t_1]^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\left[\int_{t_1}^{t_2} -2\frac{d}{dt}J(u(t,u_0))\, dt\right]^{\frac{1}{2}} [t_2 - t_1]^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\left[2(J(u(t_1,u_0)) - J(u(t_2,u_0)))\right]^{\frac{1}{2}} [t_2 - t_1]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
||u(t_2,u_0) - u(t_1,u_0)|| \leq 2\left[2(J(u(t_1,u_0)) - J(u(t_2,u_0)))\right]^{\frac{1}{2}} [t_2 - t_1]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)
$$

Por fim, de (4.2) temos que $J(t_1,u_0) \leq J(u_0)$ e $J(u(t_2,u_0)) \geq c$, então

$$
J(u(t_1,u_0)) - J(u(t_2,u_0)) \leq J(u_0) - c. \quad (4.4)
$$

Substituindo (4.4) em (4.3) obtemos

$$
||u(t_2,u_0) - u(t_1,u_0)|| \leq 2\sqrt{2}[J(u_0) - c]^{\frac{1}{2}}[t_2 - t_1]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.5)
$$

Agora mostraremos a existência de uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, T(u_0))$ tal que

$$
\lim_{t_n \to T(u_0)^-} u(t_n,u_0) = u^* \in M \cap K.
$$

Para isto vamos analisar os casos em que $T(u_0) < \infty$ e $T(u_0) = +\infty$.

- Se $T(u_0) < \infty$.

De (4.5) temos que, dado $\varepsilon > 0$ considere $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, T(u_0))$ com $t_n \leq t_{n+1}$ tal que $|t_n - T(u_0)| < \varepsilon$, então

$$
||u(t_n,u_0) - u(t_m,u_0)|| < \varepsilon\ ,\ m,n \geq n_0.
$$

Portanto, para $t_n \to T(u_0)^+$, a sequência $\{u(t_n, u_0)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ é de Cauchy. Sendo X um espaço de Banach existe $u^* \in X$ tal que $u(t_n, u_0) \to u^*$ em X quando $t_n \to T(u_0)^+$. Por hipótese M fechado, então $u^* \in M$.

Afirmamos que $u^* \in K$. De fato, caso contrário considere $t \mapsto u(t, u^*)$ com $t \in [0, T(u^*)))$, então o intervalo maximal de $u(t, u_0)$ é $[0, T(u_0)+T(u^*))$, com $0 < T(u^*)$, o que contradiz a maximalidade do intervalo $[0, T(u_0))$. Além disso, segue de (4.2) que

$$c \leq \lim_{t_n \to T(u_0)^+} J(u(t_n, u_0)) = J(u^*) \leq J(u_0).$$

- Se $T(u_0) = +\infty$.

Existe uma sequência crescente $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$ tal que $s_n \to +\infty$ e

$$\left[\frac{d}{dt} J(u(t, u_0))\right]_{t=s_n} \longrightarrow 0\ , \text{ quando } \ n \to +\infty. \tag{4.6}$$

De fato, basta considerar $t_n = n$ e o intervalo $[n, n+1]$, então usando o Teorema do Valor Médio (ver Apêndice F Teorema F.7), na aplicação $t \mapsto J(u(t, u_0))$, existe $s_n \in [n, n+1]$ tal que

$$\left[\frac{d}{dt} J(u(t, u_0))\right]_{t=s_n} = J(u(t_{n+1}, u_0)) - J(u(t_n, u_0))$$

Sendo $\{J(u(t_n, u_0))\}_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente e limitada inferiormente, então $\{J(u(t_n, u_0))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ou seja, $J(u(t_{n+1}, u_0)) - J(u(t_n, u_0)) \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Daí, usando a definição de campo pseudo-gradiente, (4.1) e (4.6), temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|J'(u(s_n, u_0))\|^2 &\leq 2\langle J'(u(s_n, u_0)), W(u(s_n, u_0))\rangle \\ &= 2\left\langle J'(u(s_n, u_0)), \left[-\frac{d}{dt} u(t, u_0)\right]_{t=s_n}\right\rangle \\ &= -2\left[\frac{d}{dt} J(u(t, u_0))\right]_{t=s_n} \to 0\ , \text{ quando } n \to +\infty. \end{aligned}$$

Temos ainda, de (4.2), que

$$c \leq \lim_{s_n \to \infty} J(u(s_n, u_0)) \leq J(u_0).$$

Em resumo, para o caso $T(u_0) = +\infty$, a sequência $\{u(s_n, u_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem a seguinte propriedade:

- $\{J(u(s_n, u_0))\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada;
- $J'(u(s_n, u_0)) \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Usando a hipótese, de que J satisfaz a condição (PS), temos que, a menos de subsequência, existe $u^* \in X$ tal que

$$\lim_{s_n \to +\infty} u(s_n, u_0) = u^*.$$

Por M ser fechado segue que $u^* \in M$.

Portanto, sendo $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, obtemos

$$0 \leq ||J'(u^*)|| = \lim_{n\to+\infty} ||J'(u(s_n, u_0))|| \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Mostrando que $u^* \in M \cap K$. Além disso,

$$c \leq J(u^*) \leq J(u_0).$$

Por fim, usando a definição de ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in M$ tal que

$$c := \inf_{u\in M} J(u) < J(u_n) \leq c + \frac{1}{n}. \tag{4.7}$$

Agora se, para $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$, então, pela condição (PS), existe $\tilde{u} \in M$ tal que $J'(\tilde{u}) = 0$ e $J(\tilde{u}) = c$.

Se $u_n \in M\backslash K$, então, pelo que foi demonstrado anteriormente, existe $\overline{u}_n \in M \cap K$ tal que $c \leq J(\overline{u}_n) \leq J(u_n)$. De (4.7) temos que $J(\overline{u}_n) \to c$ quando $n \to +\infty$ e $J'(\overline{u}_n) = 0$, já que $\overline{u}_n \in M \cap K$. Então, pela condição (PS), existe $\overline{u} \in M$ tal que, $J'(\overline{u}) = 0$ e $J(\overline{u}) = c$. ■

Definição 4.12 *Sejam M e D (c.i.f.d) para J com $D \subset M$. Definimos*

$$C_M(D) = \{u_0 \in M \mid \exists\, t' \in [0, T(u_0)) \text{ para o qual } u(t', u_0) \in D\}.$$

Quando $D = C_M(D)$ dizemos que D é um (c.i.f.d) ***completo*** *em M.*

Observação 4.13 *Facilmente mostra-se que:*

- $D \subset C_M(D)$;
- $C_M(C_M(D)) = C_M(D)$.

De fato, por definição $C_M(D) \subset C_M(C_M(D))$. *Agora seja* $u_0 \in C_M(C_M(D))$, *então existe* $t_1 \in [0, T(u_0))$ *tal que* $u(t_1, u_0) \in C_M(D)$. *Novamente, por definição, temos que existe* $t_2 \in [0, T(u(t_1, u_0)))$ *tal que*

$$u(t_2 + t_1, u_0) = u(t_2, u(t_1, u_0)) \in D.$$

Proposição 4.14 *Sejam* D_1 *e* D_2 *(c.i.f.d) para* J *tais que* $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, *então*

$$C_X(D_1 \cap D_2) = C_X(D_1) \cap C_X(D_2).$$

Demonstração.

Inicialmente, note que $C_X(D_1 \cap D_2) \subset C_X(D_1) \cap C_X(D_2)$.

Com efeito, seja $v_0 \in C_X(D_1 \cap D_2)$, então existe $t' \in [0, T(v_0))$ tal que $u(t', v_0) \in D_1 \cap D_2$, com isso $u(t', v_0) \in D_1$ e $u(t', v_0) \in D_2$, ou seja, $v_0 \in C_X(D_1) \cap C_X(D_2)$.

Agora suponhamos, por absurdo, que exista $w_0 \in C_X(D_1) \cap C_X(D_2)$ tal que $w_0 \notin C_X(D_1 \cap D_2)$. Observe que, por $w_0 \notin C_X(D_1 \cap D_2)$, podem ocorrer dois casos:

(1) $u(t, w_0) \in D_1 \backslash D_2$ para todo $t \in [0, T(w_0)]$;

(2) $u(t, w_0) \in D_2 \backslash D_1$ para todo $t \in [0, T(w_0)]$.

Por outro lado $w_0 \in C_X(D_1) \cap C_X(D_2)$, então existem $t_1.t_2 \in [0, T(w_0))$ tais que $u(t_1, w_0) \in D_1$ e $u(t_2, w_0) \in D_2$. Portanto, em qualquer um dos casos, seja (1) ou (2), temos um absurdo. ■

Proposição 4.15 *Seja* D *um (c.i.f.d), para* J, *aberto. Se* $\partial D \subset C_X(D)$, *então*

$$\partial D \cap K = \emptyset$$

onde $K = \{u \in X \mid J'(u) = 0\}$.

Demonstração.

Suponhamos, por absurdo, que exista $u_0 \in \partial D \cap K$, isto é, $u_0 \in \partial D$ e $u_0 \in K$. Se $u_0 \in K$, pelo item (ii) da Definição 4.1, temos que u_0 é uma singularidade do Campo W, então $u(t, u_0) \equiv u_0$ para todo $t \in [0, T(u_0))$.

Por outro lado, $u_0 \in \partial D \subset C_X(D)$ e com isso existe $t' \in [0, T(u_0))$ tal que $u_0 \equiv u(t', u_0) \in D$, isto é, $u_0 \in D \cap \partial D$ o que é um absurdo, pois sendo D aberto temos $D \cap \partial D = \emptyset$. ■

Lema 4.16 *Sejam M um (c.i.f.d) conexo, $D \subset M$ um (c.i.f.d) aberto em M. Então,*

(i) $C_M(D)$ é um subconjunto aberto de M;

(ii) Se $C_M(D) \subsetneqq M$ e $\inf_{u \in \partial_M D} J(u) > -\infty$, então

$$\inf_{u \in \partial_M(D)} J(u) \leq \inf_{u \in \partial_M[C_M(D)]} J(u).$$

Demonstração.

Prova de (i)

Seja $v \in C_M(D)$ assim existe $t' \in [0, T(v))$ tal que $u(t', v) \in D$ sendo D aberto temos que existe uma vizinhança V de $u(t', v)$ em D. Pela dependência contínua do fluxo segue que existe uma vizinhança U de v tal que $v \in U \subset C_M(D)$.

Prova de (ii)

Seja $w \in \partial_M C_M(D)$. Note que se $w \in \partial_M(D)$, então nada ha a fazer. Suponha que $w \notin \partial_M(D)$. Sendo D aberto, então

$$\partial_M(C_M D) \cap D = \emptyset.$$

Caso contrário teríamos, por um lado, $B_\delta(w_0) \subset D$ para algum $\delta > 0$ e por outro lado, pelo fato de que $C_M(D) \subsetneqq M$ e $w_0 \in \partial_M(C_M D)$, para todo $r > 0$ $B_r(w_0) \cap M \backslash C_M(D) \neq \emptyset$ o que é um absurdo pois $D \subset C_M(D)$.

Logo $w \notin \overline{D}^M$ e com isso existe uma sequência $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_M(D)\backslash\overline{D}^M$ tal que $w_n \to w$ em M. Desde de que $w_n \in C_M(D)$ e $w_n \notin \overline{D}^M, \forall\ n \in \mathbb{N}$, então aplicando o Teorema da Alfândega (ver Apêndice F Teorema F.6) existe $t_n > 0$ tal que $u(t_n, w_n) \in \partial_M D$. Daí,

$$J(w_n) \geq J(u(t_n, w_n)) \geq \inf_{u\in\partial_M D} J(u).$$

Passando ao limite em $n \to +\infty$ temos que

$$J(w) \geq \inf_{u\in\partial_M D} J(u)\ ,\ \forall\ w \in \partial_M C_M(D).$$

■

Proposição 4.17 *Sejam D_1, D_2 (c.i.f.d) abertos tais que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, então $C_X(D_1 \cap D_2)$ é aberto.*

Demonstração.

Claramente $D_1 \cap D_2$ é aberto e pela Proposição 4.8 temos que $D_1 \cap D_2$ é um (c.i.f.d). Então pelo Lema 4.16 concluímos que $C_X(D_1 \cap D_2)$ é aberto.

■

Lema 4.18 *Sejam M um (c.i.f.d) conexo, $\emptyset \neq D \subset M$ um (c.i.f.d) completo e aberto em M. Se $D \subsetneq M$, então $\partial_M D$ é um (c.i.f.d) não vazio.*

Demonstração.

Primeiramente note que $\partial_M D \neq \emptyset$. De fato, se $\partial_M D = \emptyset$, então

$$\overline{D}^M = D \cup \partial_M D = D,$$

ou seja, D é um fechado relativo em M. Com isso $M\backslash D$ é um aberto em M. Por outro lado, por hipótese $M\backslash D \neq \emptyset$. Além disso, $M = D \cup (M\backslash D)$ com $D \cap (M\backslash D) = \emptyset$, então M é desconexo, o que é uma contradição.

Agora fixemos $v \in \partial D_M$ e suponhamos que exista $t' \in [0, T(v))$ tal que $u(t', v) \notin \partial D_M$. Então,

- se $u(t', v) \in D$ temos que $v \in C_M(D) = D$. Sendo D aberto em M tem-se que $\partial_M D \cap D = \emptyset$, por $v \in \partial D_M$ chegamos à um absurdo.

- se $u(t', v) \in M \backslash \overline{D}^M$, sabendo que $M \backslash \overline{D}^M$ é aberto em M, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_0}(u(t', v)) \subset M \backslash \overline{D}^M$. Pela dependência contínua do fluxo existe $\delta > 0$ tal que $u(t_{u_0}, u_0) \in B_{\varepsilon_0}(u(t', v)) \subset M \backslash \overline{D}^M$ para todo $u_0 \in B_\delta(v)$. Por outro lado, $v \in \partial_M D$, então existe $v_0 \in B_\delta(v) \cap D$, ou seja, $u(t_{v_0}, v_0) \in M \backslash \overline{D}^M$ o que é uma contradição, já que D é um (c.i.f.d).

Portanto, $\partial_M D$ é um (c.i.f.d). ■

Teorema 4.19 *Sejam M um (c.i.f.d), para J, fechado e conexo, $D \subset M$ um (c.i.f.d), para J, aberto. Se $C_M(D) \subsetneqq M$, $\inf\limits_{u \in \partial_M D} J(u) > -\infty$ e J satisfaz a condição (PS) em $M \backslash D$, então*

$$\inf_{u \in \partial_M [C_M(D)]} J(u) > \inf_{u \in \partial_M (D)} J(u) > -\infty, \tag{4.8}$$

$c := \inf\limits_{u \in \partial_M [C_M(D)]} J(u)$ é um valor crítico de J, isto é, existe $\overline{u} \in \partial_M C_M(D)$ tal que $J(\overline{u}) = c$ e $J'(\overline{u}) = 0$.

Demonstração.

Pelo item (i) do Lema 4.16 temos que $C_M(D) \subset M$ é aberto e por hipótese $C_M(D) \subsetneqq M$, então usando o Lema 4.18 no conjunto $C_M(D)$ garantimos que $\partial_M C_M(D) \neq \emptyset$ e $\partial_M C_M(D)$ é um (c.i.f.d). Além disso, (4.8) completa as hipóteses para garantir o item (ii) do Lema 4.16 e assim

$$c := \inf_{u \in \partial_M [C_M(D)]} J(u) \geq \inf_{u \in \partial_M D} J(u) > -\infty.$$

Por fim, pelo Teorema 4.11, temos que $c := \inf\limits_{u \in \partial_M [C_M(D)]} J(u)$ é um valor crítico para o funcional J. ■

O Lema a seguir é bastante técnico e foge do objetivo deste trabalho por isso omitiremos sua demonstração.

Lema 4.20 *Sejam* $\mathcal{R} = \{(t,s) \in [0,1] \times [0,1]\}$ *e* V *um subconjunto aberto de* $\mathcal{R}$ *tal que*

$$\{(t,0); 0 \leq t \leq 1\} \subset V \tag{4.9}$$

$$\{(t,1); 0 \leq t \leq 1\} \cap V = \emptyset. \tag{4.10}$$

Então existe uma componente conexa $\mathcal{C}$ *de* $\partial_{\mathcal{R}} V$ *tal que*

$$\{(0,s); 0 \leq s \leq 1\} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \tag{4.11}$$

$$\{(1,s); 0 \leq s \leq 1\} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset. \tag{4.12}$$

Demonstração. [21] Lema 3.1. ■

O Teorema abaixo é o principal resultado deste capítulo no qual garante, sob certas condições, a existência de pelo menos quatro pontos críticos para o funcional $J \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Teorema 4.21 *Sejam* X *um espaço de Banach,* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ *e suponha que:*

- J *satisfaz a condição (PS);*
- D_1, D_2 *são subconjuntos de* X *abertos, conexos e (c.i.f.d);*
- $\partial D_1 \subset C_X(D_1)$*;*
- $\partial D_2 \subset C_X(D_2)$*;*
- $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

Além disso, suponha que existem um caminho $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ *e um ponto* $w \in D_1 \cap D_2$ *tais que* $\gamma(0) \in D_1 \backslash D_2$*,* $\gamma(1) \in D_2 \backslash D_1$ *e para* $0 \leq s \leq 1$ *tenhamos* $s\gamma(0) + (1-s)w \in D_1$*,* $s\gamma(1) + (1-s)w \in D_2$ *e*

$$\inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)). \tag{4.13}$$

Então, J *tem ao menos quatro pontos críticos localizados da seguinte maneira*

$$u_1 \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\ ,\ u_2 \in D_1 \backslash \overline{D}_2\ ,\ u_3 \in D_2 \backslash \overline{D}_1 \ \ e\ \ u_4 \in X \backslash (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2).$$

Demonstração.

Existência de um ponto crítico para J em $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$.

Temos, pela Proposição 4.9 e Proposição 4.8, que $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$ é um (c.i.f.d) fechado e por hipótese

$$\inf_{u \in \overline{D}_1 \cap D_2} J(u) > -\infty,$$

então, fazendo $M = \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$ e aplicando o Teorema 4.11, concluímos que J tem um ponto crítico $u_1 \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$.

Existência de um ponto crítico para J em $D_1 \backslash \overline{D}_2$.

Primeiramente afirmamos que:

(i) $C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2) \subsetneqq \overline{D}_1$;

(ii) Existe um ponto crítico $\tilde{u} \in \partial_{\overline{D}_1}[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)]$ para o funcional J.

Prova de (i)

Com efeito, $\overline{D}_1 \cap D_2$ é um aberto de $\overline{D}_1$. Pela Proposição 4.9, por hipótese e Proposição 4.8 segue que $\overline{D}_1 \cap D_2$ é um (c.i.f.d). De (4.13) tem-se

$$\inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \geq J(\gamma(0)). \tag{4.14}$$

Temos, ainda por hipótese, que $\gamma(0) \in D_1 \backslash D_2$. Afirmamos que

$$\gamma(0) \in \overline{D}_1 \backslash C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2).$$

De fato, caso contrário existe $t_0 \in [0, T(\gamma(0)))$ tal que $u(t_0, \gamma(0)) \in \overline{D}_1 \cap D_2$. Usando o fato de que $t \mapsto J(u(t, \gamma(0)))$ é decrescente e (4.14) obtemos

$$J(\gamma(0)) \geq J(u(t_0, \gamma(0))) \geq \inf_{u \in \overline{D}_1 \cap D_2} J(u) > J(\gamma(0))$$

o que é um absurdo.

Prova de (ii)

Note que

$$\inf_{u \in \partial_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)} J(u) \ \geq \ \inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > -\infty.$$

Sejam $M = \overline{D}_1$, $D = \overline{D}_1 \cap D_2$ e fazendo uso do item (i) ficamos nas hipóteses do Teorema 4.19, então existe um ponto crítico $\tilde{u} \in \partial_{\overline{D}_1}[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)]$ para o funcional J.

Agora vamos mostrar que $\tilde{u} \notin \overline{D}_1 \cap D_2$.

Segue do Lema 4.16, fazendo $M = \overline{D}_1$, $D = \overline{D}_1 \cap D_2$, que $C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)$ é um subconjunto aberto de $\overline{D}_1$, então

$$\partial_{\overline{D}_1}[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)] \cap C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2) = \emptyset. \tag{4.15}$$

Por outro lado, por definição

$$\overline{D}_1 \cap D_2 \subset C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)$$

daí por (4.15)

$$\partial_{\overline{D}_1}[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)] \cap (\overline{D}_1 \cap D_2) = \emptyset$$

mostrando que $\tilde{u} \notin \overline{D}_1 \cap D_2$. Com isso podem ocorrer dois casos:

- $\tilde{u} \in \overline{D}_1 \backslash D_2$;
- $\tilde{u} \in D_2 \backslash \overline{D}_1$.

Observe que $\tilde{u} \in \partial_{\overline{D}_1}[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)] \subset \overline{D}_1$. Além disso, segue da Proposição 4.15 que

$$\partial D_1 \cap K = \emptyset \ \text{ e } \ \partial D_2 \cap K = \emptyset.$$

Portanto, $\tilde{u} \in D_1 \backslash \overline{D_2}$.

De maneira análoga mostra-se a existência de um ponto crítico para J em $D_2 \backslash \overline{D}_1$.

Existência de um ponto crítico para J em $X\backslash(\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2)$.

Inicialmente consideremos $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto definido no Lema 4.20 e a aplicação contínua

$$\begin{aligned} G: \quad \mathcal{R} \quad &\longrightarrow X \\ (t,s) \quad &\longmapsto G(t,s) = s\gamma(t) + (1-s)w \end{aligned}$$

onde $\gamma(t)$ e w são dados nas hipóteses. Claramente G associa a cada $t \in [0,1]$ o segmento de reta que une os pontos $\gamma(t)$ e w.

Agora considere

$$V = \{(t,s) \in \mathcal{R} \mid G(s,t) \in C_X(D_1 \cap D_2)\} = G^{-1}(C_X(D_1 \cap D_2)).$$

Claramente $V \neq \emptyset$, pois por hipótese $G(t,0) = w \in D_1 \cap D_2$.

Para V valem as seguintes propriedades:

(P1) V é um conjunto aberto de $\mathcal{R}$. De fato, sendo D_1 e D_2 (c.i.f.d) e abertos, então $D_1 \cap D_2$ é um (c.i.f.d) e aberto e, consequentemente, pelo Lema 4.16 $C_X(D_1 \cap D_2)$ é um subconjunto aberto de X. Sendo G um aplicação contínua, então $V = G^{-1}(D_1 \cap D_2)$ é aberto.

(P2) $\{(t,0); 0 \leq t \leq 1\} \subset V$.

Com efeito, $G(t,0) = w \in D_1 \cap D_2$ e $D_1 \cap D_2 \subset C_X(D_1 \cap D_2)$, ou seja, $(t,0) \in V$ pata $t \in [0,1]$.

(P3) $\{(t,1); 0 \leq t \leq 1\} \cap V = \emptyset$.

Por hipótese

$$\inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)), \tag{4.16}$$

então existe $0 < \eta < 1$ tal que

$$\inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > \sup\{J(G(t,s)); (t,s) \in [0,1] \times [1-\eta, 1]\}.$$

De fato, notemos que $[0,1]\times[0,1]$ é compacto e $(s,t)\mapsto J(G(s,t))$ é uma aplicação contínua. Por outro lado para cada $t\in[0,1]$ o funcional J é contínuo em $G(t,1)$, ou seja, dado $\varepsilon>0$ existe $0<\eta<1$ tal que para $s\in[1-\eta,1]$ e $t\in[0,1]$ tem-se

$$|J(G(t,s))-J(G(t,1))|<\varepsilon.$$

Daí, para $s\in[1-\eta,1]$ e $t\in[0,1]$

$$J(G(t,s))<J(G(t,1))+\varepsilon\le\sup_{t\in[0,1]}J(G(t,1))+\varepsilon. \tag{4.17}$$

Portanto, de (4.16) e (4.17)

$$\begin{aligned}\sup\{J(G(t,s));(t,s)\in[0,1]\times[1-\eta,1]\} &\le \sup_{t\in[0,1]}J(G(t,1))+\varepsilon\\ &= \sup_{t\in[0,1]}J(\gamma(t))+\varepsilon\\ &< \inf_{u\in\overline{D}_1\cap\overline{D}_2}J(u),\end{aligned}$$

ou seja,

$$k:=\sup\{J(G(t,s));(t,s)\in[0,1]\times[1-\eta,1]\}<\inf_{u\in\overline{D}_1\cap\overline{D}_2}J(u). \tag{4.18}$$

Afirmamos que $V\cap\{(t,s)\in[0,1]\times[1-\eta,1]\}=\emptyset$. Suponha, por absurdo, que exista $x^*=(t^*,s^*)\in[0,1]\times[1-\eta,1]$ com $x^*\in V$, assim $G(x^*)\in C_X(D_1\cap D_2)$, isto é, existe $t^*\in[0,T(G(x^*)))$ tal que $u(t^*,G(x^*))\in D_1\cap D_2$. Recorde que a aplicação $t\mapsto J(u(t,G(x^*)))$ é decrescente, então usando (4.18) temos

$$k\ge J(G(x^*))\ge J(u(t^*,G(x^*)))\ge\inf_{u\in\overline{D}_1\cap\overline{D}_2}J(u)>k$$

o que é um absurdo. Mostrando que $\{(t,s);t\in[0,1],s\in[1-\eta,1]\}\cap V=\emptyset$.

Agora podemos aplicar o Lema 4.20 ao conjunto V e concluir que existe uma componente conexa Γ de $\partial_{\mathcal{R}}V$ tal que

$$\{(0,s);0\le s\le1\}\cap\Gamma\ne\emptyset \ \text{ e } \ \{(1,s);0\le s\le1\}\cap\Gamma\ne\emptyset.$$

Segue então que,

(1) $G(\Gamma)$ é conexo;

(2) $G(\Gamma) \cap \{s\gamma(0)+(1-s)w; 0 \leq s \leq 1\} = G(\Gamma) \cap \{G(0,s); 0 \leq s \leq 1\} \neq \emptyset$;

(3) $G(\Gamma) \cap \{s\gamma(1)+(1-s)w; 0 \leq s \leq 1\} = G(\Gamma) \cap \{G(1,s); 0 \leq s \leq 1\} \neq \emptyset$.

Por outro lado, das hipóteses

$\{s\gamma(0) + (1-s)w; 0 \leq s \leq 1\} \subset D_1$ e $\{s\gamma(1) + (1-s)w; 0 \leq s \leq 1\} \subset D_2$.

Daí, de (2) e (3), obtemos

$$G(\Gamma) \cap D_1 \neq \emptyset \text{ e } G(\Gamma) \cap D_2 \neq \emptyset \tag{4.19}$$

Agora nosso objetivo é mostrar que $G(\Gamma) \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2)$.

Primeiramente provemos que $G(\partial_{\mathcal{R}} V) \subset \partial G(V)$. Seja $v_0 \in G(\partial_{\mathcal{R}} V)$, então devemos mostrar que dado $\eta > 0$ tem-se

$$B_\eta(v_0) \cap G(V) \neq \emptyset \text{ e } B_\eta(v_0) \cap X \backslash G(V) \neq \emptyset.$$

Ora, se $v_0 \in G(\partial_{\mathcal{R}} V)$, então existe $w_0 \in \partial_{\mathcal{R}} V$ tal que $v_0 = G(w_0)$. Recorde que G é contínua, daí dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$G(B_\delta(w_0)) \subset B_\varepsilon(G(w_0)) = B_\varepsilon(v_0). \tag{4.20}$$

Para concluir vamos analisar duas situações:

- Se $v \in (B_\delta(w_0) \backslash \overline{V}) \subset \mathcal{R}$, então $G(v) \notin C_X(D_1 \cap D_2)$ (pois $V = \{(t,s) \in \mathcal{R} \mid G(s,t) \in C_X(D_1 \cap D_2)\}$), ou seja, $G(v) \in X \backslash G(V)$ e de (4.20) concluímos que
$$B_\varepsilon(v_0) \cap X \backslash G(V) \neq \emptyset.$$

- Se $v \in (B_\delta(w_0) \cap V) \subset \mathcal{R}$, temos que $G(v) \in C_X(D_1 \cap D_2)$ e de (4.20)
$$B_\varepsilon(v_0) \cap G(V) \neq \emptyset.$$

Portanto,

$$G(\partial_{\mathcal{R}} V) \subset \partial G(V) \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2)$$

e consequentemente, pelo fato de que $G(\Gamma) \subset G(\partial_{\mathcal{R}} V)$, obtemos

$$G(\Gamma) \subset G(\partial_{\mathcal{R}} V) \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2).$$

Logo, sendo $C_X(D_1 \cap D_2)$ aberto, temos que

$$G(\Gamma) \cap C_X(D_1 \cap D_2) = \emptyset. \tag{4.21}$$

Afirmação 1: $G(\Gamma) \cap (\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2) = \emptyset$.

Notemos que $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \subset C_X(D_1 \cap D_2)$ pois, por hipótese, temos que $\partial D_1 \subset C_X(D_1)$ e $\partial D_2 \subset C_X(D_2)$, então $\partial D_1 \cap \partial D_2 \subset C_X(D_1) \cap C_X(D_2)$. Com isso, da Proposição 4.14, segue que $\partial D_1 \cap \partial D_2 \subset C_X(D_1 \cap D_2)$ e, por definição, $D_1 \cap D_2 \subset C_X(D_1 \cap D_2)$, ou seja, $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \subset C_X(D_1 \cap D_2)$. Portanto, de (4.21) concluímos que

$$G(\Gamma) \cap (\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2) = \emptyset. \tag{4.22}$$

Assim, de (4.19) e (4.22), temos que

$$G(\Gamma) \cap (D_1 \backslash \overline{D}_2) \neq \emptyset \ \text{ e } \ G(\Gamma) \cap (D_2 \backslash \overline{D}_1) \neq \emptyset \tag{4.23}$$

Recorde que $G(\Gamma) \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2)$. Consideremos Λ a componente conexa de $\partial C_X(D_1 \cap D_2)$ que contém $G(\Gamma)$, então de (4.23) temos que

$$\Lambda \cap (D_1 \backslash \overline{D}_2) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \Lambda \cap (D_2 \backslash \overline{D}_1) \neq \emptyset. \tag{4.24}$$

Agora sejam

$$\Lambda_1 = \{v \in \Lambda : u(t_1, v) \in (D_1 \backslash \overline{D}_2) \ \text{ para algum } \ t_1 \in [0, T(v))\}$$

$$\Lambda_2 = \{v \in \Lambda : u(t_2, v) \in (D_2 \backslash \overline{D}_1) \ \text{ para algum } \ t_2 \in [0, T(v))\}.$$

Por (4.24) temos que Λ_1 e Λ_2 são não vazios.

Afirmação 2: $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Suponhamos, por absurdo, que exista $v_0 \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$. Então, existem $t_1, t_2 \in [0, T(v_0))$ tais que

$$u(t_1, v_0) \in D_1 \backslash \overline{D}_2 \ \text{ e } \ u(t_2, v_0) \in D_2 \backslash \overline{D}_1. \tag{4.25}$$

Por construção $\Lambda \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2)$ e por $\partial C_X(D_1 \cap D_2) \cap C_X(D_1 \cap D_2) = \emptyset$ tem-se $v_0 \notin C_X(D_1 \cap D_2)$ com isso, para todo $t \in [0, T(v_0))$, temos os seguintes casos:

(A) $u(t, v_0) \in \overline{D}_1 \backslash \overline{D}_2$, $\forall\, t \in [0, T(v_0))$;

(B) $u(t, v_0) \in \overline{D}_2 \backslash \overline{D}_1$, $\forall\, t \in [0, T(v_0))$;

(C) $u(t, v_0) \in \partial C_X(D_1 \cap D_2) \backslash (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2)$, $\forall\, t \in [0, T(v_0))$.

Se ocorre (A), (B) ou (C), devido à (4.25), chegamos a um absurdo. Dessa forma concluímos que $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Além disso, Λ_1 e Λ_2 são abertos em Λ. De fato, basta mostrar que dado $v \in \Lambda_1$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(v) \cap \Lambda \subset \Lambda_1$. Seja $v \in \Lambda_1$, então existe $t_1 \in [0, T(v))$ tal que $u(t_1, v) \in D_1 \backslash \overline{D}_2$. Sendo $\overline{D}_2$ fechado e $\{u(t_1, v)\} \subset (D_1 \backslash \overline{D}_2)$ compacto com $\overline{D}_2 \cap \{u(t_1, v)\} = \emptyset$, então $dist(u(t_1, v), \overline{D}_2) > 0$, ou seja, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_0}(u(t_1, v)) \subset D_1 \backslash \overline{D}_2$. Daí, pela dependência contínua do fluxo, existe $\delta = \delta(\varepsilon_0) > 0$ tal que $u(t_w, w) \in B_{\varepsilon_0}(u(t_1, v)) \subset D_1 \backslash \overline{D}_2$ para cada $w \in B_\delta(v) \cap \Lambda$. Mostrando que $B_\delta(v) \cap \Lambda \subset \Lambda_1$. De maneira análoga mostra-se que Λ_2 é aberto em Λ.

Pela **afirmação 2**, por Λ_1 e Λ_2 serem abertos em Λ bem como Λ ser conexo, então $\Lambda \backslash (\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \neq \emptyset$.

Note que, uma consequência do que foi feito até agora é que $\partial C_X(D_1 \cap D_2)$ é um (c.i.f.d) em X. De fato, vimos que $C_X(D_1 \cap D_2)$ é um aberto de X(ver prova de (P1)), pela Observação 4.13 temos que $C_X(D_1 \cap D_2)$ é completo e de (4.21) temos que $C_X(D_1 \cap D_2)$ é um subconjunto próprio de X, então, pelo Lema 4.18, $\partial C_X(D_1 \cap D_2)$ é um (c.i.f.d) em X.

Daí, considere $u_0 \in \Lambda \backslash (\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2)$.

Agora se $u_0 \in K$ concluímos a demonstração do Teorema. Já que por $u_0 \in \Lambda \backslash (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ tem-se $u_0 \notin \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, isto é, para todo $t \in [0, T(u_0))$ temos que $u(t, u_0) \notin D_1 \backslash \overline{D}_2$ e $u(t, u_0) \notin D_2 \backslash \overline{D}_1$. Além disso $\partial D_1 \cap K = \emptyset$, $\partial D_2 \cap K = \emptyset$ e $u(t, u_0) \in \partial C_X(D_1 \cap D_2)$ para todo $t \in [0, T(u_0))$, ou seja, $u(t, u_0) \notin D_1 \cap D_2$, $\forall\, t \in [0, T(u_0))$. Logo

$$u(t, u_0) \notin \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 \ \text{ para todo } \ t \in [0, T(u_0)).$$

Em particular $u_0 \notin \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$.

Suponha que $u_0 \in \partial C_X(D_1 \cap D_2) \backslash K$.

Observe que,

$$\inf_{\partial(D_1 \cap D_2)} J(u) \geq \inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > -\infty.$$

Assim, pelo Lema 4.16 (considerando $M = X$ e $D = D_1 \cap D_2$), segue que

$$c := \inf_{u \in \partial C_X(D_1 \cap D_2)} J(u) > \inf_{\partial(D_1 \cap D_2)} J(u) > -\infty.$$

Agora estamos nas hipóteses para usar os mesmos argumento utilizado na demonstração do Teorema 4.11, seja $T(u_0) < \infty$ ou $T(u_0) = +\infty$, e com isso garantir que existe $\{u(t_n, u_0)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2)$, tal que

$$\lim_{t_n \to T(u_0)^+} u(t_n, u_0) = u^* \in \partial C_X(D_1 \cap D_2) \cap K.$$

Temos, pela Proposição 4.15, que $u^* \notin \partial D_1 \cup \partial D_2$. Além disso, sendo $C_X(D_1 \cap D_2)$ aberto, tem-se que $u^* \notin D_1 \cap D_2$.

Para finalizar vamos mostrar que $u^* \notin (D_1 \backslash D_2) \cup (D_2 \backslash D_1)$. De fato, suponha que $u^* \in D_1 \backslash D_2$. Por hipótese D_1 é aberto e por $u(t_n, u_0) \to u^*$

quando $t_n \to T(u_0)^+$, então existe $\delta > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u(t_n, u_0) \in B_\delta(u^*) \subset D_1$ para todo $n \geq n_0$. Temos um absurdo, pois $u_0 \in \Lambda \backslash (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ e assim para todo $t \in [0, T(u_0))$

$$u(t, u_0) \notin D_1 \backslash \overline{D}_2 \ \text{ e } \ u(t, u_0) \notin D_2 \backslash \overline{D}_1.$$

Portanto, $u^* \in X \backslash (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2)$. ∎

O próximo Teorema é uma versão do Teorema 4.21 no caso em que $X = \mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e a derivada do funcional $J \in C^1(\mathcal{H}, \mathbb{R})$ é dada por $J'(u) = u - A(u)$, para $u \in \mathcal{H}$, onde $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é um operador.

Primeiramente vamos precisar de um Lema auxiliar que, sob certas condições, garante a existência de um campo pseudo-gradiente para o funcional J.

Lema 4.22 *Seja $J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 tal que $J'(u) = u - A(u)$. Suponha que D_1 e D_2 são subconjuntos de $\mathcal{H}$ tais que $A(\partial D_1) \subset D_1$ e $A(\partial D_2) \subset D_2$. Então, existe um campo pseudo-gradiente de vetores W para J, o qual torna os conjuntos D_1 e D_2 invariantes por fluxos decrescente. Além disso, tem-se $\partial D_1 \subset C_{\mathcal{H}}(D_1)$ e $\partial D_2 \subset C_{\mathcal{H}}(D_2)$.*

Demonstração. Ver [21] Lema 3.2. ∎

O teorema abaixo será uma ferramenta importante nos próximos capítulos para garantir a existência de três soluções não triviais das quais uma é nodal.

Teorema 4.23 *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $J \in C^1(\mathcal{H}, \mathbb{R})$. Suponha que*

- *o funcional J satisfaz a condição (PS) em $\mathcal{H}$;*
- *$J'(u) = u - A(u)$ onde $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador;*
- *D_1 e D_2 são (c.i.f.d) abertos e convexos de $\mathcal{H}$;*
- *$D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$;*

- $A(\partial D_1) \subset D_1$ *e* $A(\partial D_2) \subset D_2$.

Se existe um um caminho $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{H}$ *tal que* $\gamma(0) \in D_1 \backslash D_2$, $\gamma(1) \in D_2 \backslash D_1$, *e*

$$\inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)). \tag{4.26}$$

Então, J *tem ao menos quatro pontos críticos localizados da seguinte maneira*

$$u_1 \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\ ,\ u_2 \in D_1 \backslash \overline{D}_2\ ,\ u_3 \in D_2 \backslash \overline{D}_1 \ \ e \ \ u_4 \in \mathcal{H} \backslash (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2).$$

Demonstração.

Pelo Lema 4.22 existe um campo pseudo-gradiente W, para o funcional J, que torna os conjuntos D_1 e D_2 invariantes por fluxo decrescente (c.i.f.d). Além disso, $\partial D_1 \subset C_{\mathcal{H}}(D_1)$ e $\partial D_2 \subset C_{\mathcal{H}}(D_2)$. Portanto, estamos nas hipóteses do Teorema (4.21). ■

Capítulo 5

Equação de Schrödinger superlinear

Neste capítulo utilizamos como texto base o artigo de Bartsch, Liu e Weth [6]. Usando a teoria de (c.i.f.d) desenvolvida no Capítulo 4 mostramos a existência de solução nodal para equação superlinear de Schrödinger (não autônoma)

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(u)\ , \quad \mathbb{R}^N \\ \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Caratheodory. Além disso vamos supor que:

(A_1) $a \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N} \text{ess}\, a(x) > 0$;

(A_2) $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{f(x,t)}{|t|} = 0$ uniformemente em x;

(A_3) existe $C > 0$ e $p \in (2, 2^*)$ tal que

$$|f(x,t)| \leq C(1 + |t|^{p-1}) \;\text{ para }\; x \in \mathbb{R}^N\ ,\ t \in \mathbb{R};$$

(A_4) (Ambrosetti-Rabinowitz) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(x,t) < tf(x,t), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^N \, , \, t \in \mathbb{R}$$

onde $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,t)dt;$

(A_5) Uma das seguintes condições é satisfeita:

$(A_{5.1})$ $\forall \, M > 0$ tem-se

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^N : a(x) \le M\}) < \infty$$

$(A_{5.2})$ $\displaystyle\limsup_{|x|\to+\infty} \sup_{|t|\le\tau} \frac{|f(x,t)|}{|t|} = 0 \, , \, \forall \, \tau > 0;$

(A_6) A função $t \longmapsto \dfrac{f(x,t)}{|t|}$ é não crescente em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, um exemplo de uma não linearidade que satisfaz $(A_2)-(A_4)$ e (A_6) é a seguinte:

$$f(x,t) = a(x)|t|^{p-2}t \, , \, \forall \, t \in \mathbb{R}$$

onde $2 < p < 2^*$ e $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $a(x) \ge 0$ para algum subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Denotaremos u_+, u_- como sendo a solução positiva e negativa, respectivamente. O resultado principal deste capítulo:

Teorema 5.1 *Suponha válidas as hipóteses (A_1)-(A_6), então (5.1) possui três soluções não triviais u_+, u_- e $\tilde{u}$. Em que, u_+ é positiva, u_- é negativa e $\tilde{u}$ muda de sinal. Além disso, a solução nodal $\tilde{u}$ tem exatamente dois domínios nodal.*

5.1 Preliminares

Inicialmente, para $1 \le s \le +\infty$, denotemos por $|\cdot|_s$ a norma em $L^s(\mathbb{R}^N)$. Agora consideremos o conjunto

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 < \infty \right\}. \tag{5.2}$$

Pelo estudo feito no Apêndice B, E é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$\langle u,v\rangle_E = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + a(x)uv)\, dx \ ,\ \forall\, u,v \in E$$

e a norma induzida $||\cdot||_E = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_E}$.

Além disso, $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ continuamente e consequentemente, pela imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ ser contínua, a imersão $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ é também contínua para $s \in [2, 2^*]$. Essas imersões são compactas, para $s \in [2, 2^*)$, caso ocorra $(A_{5.1})$, como mostraremos adiante.

Ademais, para $R > 0$ definimos

$$B_R(u) = \{v \in E \mid ||v-u||_E < R\}.$$

Lema 5.2 *Segue de* (A_2) *e* (A_3) *que* $\forall\, \varepsilon > 0$ *existe* $K = K(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$|f(t)| \le \varepsilon|t| + K|t|^{p-1} \ ,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \ \ e \ \ p \in (2, 2^*). \tag{5.3}$$

Além disso,

$$|F(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}|t|^2 + \frac{K}{p}|t|^p \ ,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \ \ e \ \ p \in (2, 2^*). \tag{5.4}$$

Demonstração.

Por (A_3) temos que existe $C > 0$ e $p \in (2, 2^*)$ tal que

$$|f(t)| \le C(1 + |t|^{p-1}) \ ,\ \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

De (A_2) dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|t| \le \delta$ tem-se $|f(t)| \le \varepsilon\ |t|$. Daí,

$$\begin{aligned} |f(t)| &\le \varepsilon\ |t| + |t|^p \\ &= \varepsilon\ |t| + |t|^{p-1}\ |t| \\ &\le \varepsilon\ |t| + \delta|t|^{p-1} \\ &= \varepsilon|t| + K|t|^{p-1} \end{aligned}$$

onde $K = \delta > 0$.

Agora supondo $|t| \geq \delta$, então de (5.5)

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq C(1+|t|^{p-1}) \\ &\leq C|t|^{p-1}\left(\frac{1}{|t|^{p-1}}+1\right) \\ &\leq C|t|^{p-1}\left(\frac{1}{\delta^{p-1}}+1\right) \\ &\leq \varepsilon|t| + K|t|^{p-1} \end{aligned}$$

onde $K = C\left(\frac{1}{\delta^{p-1}}+1\right) = K(\varepsilon) > 0$.

Integrando (5.3) de 0 a s temos

$$|F(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t|^2 + \frac{K}{p}|t|^p \ , \ \forall\, t \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ p \in (2, 2^*). \tag{5.6}$$

■

Segue, do Lema 5.2, que o funcional associado ao problema (5.1) dado por

$$\begin{aligned} J : \ E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + a(x)|u|^2) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) \end{aligned}$$

está bem definido e é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ com

$$J'(u)\cdot v = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u \nabla v + a(x)uv) - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v \ , \ \forall\, u, v \in E.$$

Portanto pontos críticos do funcional J são soluções fracas para o problema (5.1).

O gradiente de J tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \nabla J : \ E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto \nabla J(u) = u - A(u) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A: \ \ E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto A(u) = [-\Delta + a]^{-1} \cdot f(u). \end{aligned}$$

De fato, para cada $u \in E$ temos que $J'(u) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear e contínuo. Por E ser um espaço de Hilbert segue, pelo Teorema da Representação de Riesz, que existe único $\varphi \in E$ tal que

$$J'(u) \cdot v = \langle v, \varphi \rangle_E \ , \ \forall \ v \in E. \tag{5.7}$$

Em outras palavras podemos identificar $J'(u)$ como $\varphi \in E$, isto é, $J'(u) = \varphi$. Agora basta determinar explicitamente φ. Segue de (5.7) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + a(x) uv) - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \varphi \nabla v + a(x) \varphi v) \ , \ \forall \ v \in E,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla (u - \varphi) \nabla v + a(x)(u - \varphi) v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u) v \ , \ \forall v \in E. \tag{5.8}$$

A expressão (5.8) diz que $w = u - \varphi$ é solução do problema

$$-\Delta w + a(x) w = f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

Daí,

$$\begin{aligned} & -\Delta w + a(x) w = f(u) \\ \Leftrightarrow \ \ & [-\Delta + a(x)] \cdot w = f(u) \\ \Leftrightarrow \ \ & u - \varphi = w = [-\Delta + a(x)]^{-1} \cdot f(u) \\ \Leftrightarrow \ \ & \varphi = u - [-\Delta + a(x)]^{-1} \cdot f(u). \end{aligned}$$

Portanto,

$$J'(u) = u - [-\Delta + a]^{-1} \cdot f(u) \ , \ u \in E.$$

Uma consequência de (5.8) é que, para cada $u \in E$, $A(u) := [-\Delta + a]^{-1} \cdot f(u)$ é unicamente determinado pela relação

$$\langle A(u), v\rangle_E = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v \ , \ \forall\, v \in E. \tag{5.9}$$

Ora, sendo $u - \varphi = [-\Delta + a(x)]^{-1} \cdot f(u) := A(u)$ temos que

$$\begin{aligned} \langle A(u), v\rangle_E &= \langle u - \varphi, v\rangle_E \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u-\varphi)\nabla v + a(x)(u-\varphi)v \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v \ , \ \forall\, v \in E. \end{aligned}$$

Observação 5.3 *Em espaço de Hilbert temos que* $J'(u) = \nabla J(u)$.

Proposição 5.4 *Supondo que ocorre* $(A_{5.1})$, *então para* $s \in [2, 2^*)$ *a imersão*

$$E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$$

é compacta.

Demonstração.

Primeiramente mostraremos que $u_n \to u_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ sempre que $u_n \rightharpoonup u_0$ em E, quando $n \to +\infty$. Para isto, é suficiente mostrar que

$$|u_n|_2 \to |u_0|_2 \ , \ \text{quando} \ \ n \to +\infty. \tag{5.10}$$

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\alpha_n = |u_n|_2$. Sendo $L^2(\mathbb{R}^N)$ um espaço de Hilbert temos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ é limitada e

$$\liminf_n |u_n|_2 \geq |u_0|_2. \tag{5.11}$$

Assim seja $\alpha_n \to \alpha_0 \geq |u_0|_2$, quando $n \to +\infty$.

Afirmamos que dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} (u_n)^2 < \varepsilon \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.12}$$

Suponhamos, por um instante, que vale (5.12), então

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} (u_n)^2 + \int_{B_R(0)} (u_n)^2 \ < \ \varepsilon + \int_{B_R(0)} (u_n)^2 \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$|u_n|_2^2 \ < \ \varepsilon + \int_{B_R(0)} (u_n)^2 \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pela imersão $E \hookrightarrow L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ser compacta, bem como de (5.11), tem-se que

$$|u_0|_2 \leq \alpha_0 = \lim_n |u_n|_2 \leq |u_0|_2 + \varepsilon \ , \ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Logo, sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos (5.10).

Prova de (5.12)

Seja $u_n \rightharpoonup u_0$ em E, então $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em E. Assim podemos fixar $\varepsilon > 0$, arbitrário, e considerar uma constante M de tal modo que

$$M > \frac{2}{\varepsilon} \sup_n ||u_n||^2. \tag{5.13}$$

Além disso, pela imersão contínua $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)[s \in (2, 2^*)]$, temos que

$$\sup_{u_n \in E\backslash\{0\}} \frac{|u_n|_{2p}^p}{||u_n||^2} \leq C \tag{5.14}$$

para $p \in \left(1, \dfrac{N}{N-2}\right)$.

Por $(A_{5.1})$ temos que

$$\lim_{R\to+\infty} \mu(\{x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R(0) : a(x) \leq M\}) = 0,$$

isto é, existe $R_0 > 0$ tal que $R \geq R_0$ implica

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R(0) : a(x) \leq M\}) < \left(\frac{\varepsilon}{2C \sup_n ||u_n||^2}\right)^q \tag{5.15}$$

onde $q > 0$ é tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Agora, para $R \geq R_0$, definamos os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R(0) : a(x) \geq M\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R(0) : a(x) < M\}.$$

Daí, por (5.13), temos

$$\begin{aligned} \int_A (u_n)^2 &\leq \int_A \frac{a(x)}{M}(u_n)^2 \\ &\leq \frac{1}{M}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)(u_n)^2 \\ &\leq \frac{1}{M}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + a(x)(u_n)^2) \\ &= \frac{1}{M}||u_n||^2 < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Temos ainda, pela desigualdade de Hölder, por (5.14) e (5.15), que

$$\begin{aligned} \int_B (u_n)^2 &\leq \left(\int_B |u_n|^{2p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B 1\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= ||u_n||^2 \frac{|u_n|_{2p}^2}{||u_n||^2} [\mu(B)]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq ||u_n||^2 \sup_{u_n \in E\backslash\{0\}} \frac{|u_n|_{2p}^p}{||u_n||^2} [\mu(B)]^{\frac{1}{q}} \\ &< C\sup_n ||u_n||^2 \left(\frac{\varepsilon}{2C\sup_n ||u_n||^2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

E assim fica provado que vale (5.12) e com isso $u_n \to u_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to +\infty$. Pelo Lema de Lions (Ver Apêndice D Lema D.8) concluímos a demonstração da Proposição. ■

5.2 Condição de Palais-Smale em E

Lema 5.5 *J satisfaz a condição de Palais-Smale em E.*

Demonstração.

Considere a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que

$$J(u_n) \to c \ \text{ e } \ J'(u_n) \to 0 \ , \ \text{quando} \ \ n \to +\infty.$$

Então, pela condição (A_4), para $\theta > 2$ temos

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &= J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||u_n||^2 + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N}[f(u)u - \theta F(u)] \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||u_n||^2, \end{aligned}$$

logo $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em E. Daí, a menos de subsequência, existe $u_0 \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em E e consequentemente

$$\langle u_n, u_0\rangle_E \to \langle u_0, u_0\rangle_E = ||u_0||^2 \ , \ \ \text{quando} \ \ n \to +\infty.$$

Daí, para concluirmos a demonstração, é suficiente mostrar que

$$||u_n||^2 \to ||u_0||^2 \ , \ \text{quando} \ \ n \to +\infty \tag{5.16}$$

pois para cada $n \in \mathbb{N}$

$$||u_n - u_0||^2 = ||u_n||^2 - 2\langle u_n, u_0\rangle_E + ||u_0||^2.$$

Note que $J'(u_n)\cdot(u_n - u_0) = o_n(1)$, então

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_n(||u_n||^2 - ||u_0||^2) &= \limsup_n \langle u_n, u_n\rangle_E - \langle u_0, u_0\rangle_E \\ &= \limsup_n \langle u_n, u_n - u_0\rangle_E \\ &= \limsup_n \left[\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(u_n - u_0) + a(x)u_n(u_n - u_0)\right] \\ &= \limsup_n \left[\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u_0) + o_n(1)\right]. \end{aligned}$$

Agora basta mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u_0)\right| \leq \varepsilon\ ,\ \text{para}\ \ n \geq n_0.$$

Suponhamos que ocorra $(A_{5.1})$, então segue da Proposição 5.4 que a imersão $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$, para $s \in [2, 2^*)$, é compacta, ou seja, $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$. Logo, de (5.3) e da desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u_0)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n||u_n - u_0| + K\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-1}|u_n - u_0| \\
&\leq |u_n|_2|u_n - u_0|_2 + K|u_n|_p^{p-1}|u_n - u_0|_p \to 0\ ,\ \text{quando}\ \ n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Agora suponhamos que ocorre $(A_{5.2})$. Seja $\varepsilon > 0$, então para $\tau \geq 1$, de (5.3) e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|u_n|\geq\tau} f(u_n)(u_n - u_0)\right| &\leq \int_{|u_n|\geq\tau} |u_n||u_n - u_0| + K\int_{|u_n|\geq\tau} |u_n|^{p-1}|u_n - u_0| \\
&\leq \int_{|u_n|\geq\tau} |u_n|^{p-1}|u_n - u_0| + K\int_{|u_n|\geq\tau} |u_n|^{p-1}|u_n - u_0| \\
&= (1+K)\int_{|u_n|\geq\tau} |u_n|^{p-1}|u_n - u_0| \\
&= (1+K)\int_{|u_n|\geq\tau} |u_n|^{p-1}|u_n|^{2^*-2^*}|u_n - u_0| \\
&= (1+K)\int_{|u_n|\geq\tau} |u_n|^{2^*-1}|u_n|^{p-2^*}|u_n - u_0| \\
&\leq (1+K)\tau^{p-2^*}\int_{|u_n|\geq\tau} |u_n|^{2^*-1}|u_n - u_0| \\
&\leq (1+K)\tau^{p-2^*}|u_n|_{2^*}^{2^*-1}|u_n - u_0|_{2^*}.
\end{aligned}$$

Portanto, para τ suficientemente grande, sendo $p < 2^*$, obtemos

$$\left|\int_{|u_n|\geq\tau} f(u_n)(u_n - u_0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.17}$$

Por outro lado, de $(A_{5.2})$ dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que para $|x| \geq R$ e $u \in E$ tem-se

$$\sup_{|u(x)|\leq\tau} \frac{|f(u)|}{|u|} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Então, para $|x| \geq R$ e n suficientemente grande, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|u_n(x)|\leq\tau} f(u_n)(u_n-u_0)\right| &\leq \int_{|u_n(x)|\leq\tau} |f(u_n)|\,|u_n-u_0| \\
&= \int_{|u_n(x)|\leq\tau} |u_n|\,|u_n-u_0|\,\frac{|f(u_n)|}{|u_n|} \\
&\leq \int_{|u_n(x)|\leq\tau} |u_n|\,|u_n-u_0|\,\sup_{|u_n|\leq\tau}\frac{|f(u_n)|}{|u_n|} \\
&\leq |u_n|_2\,|u_n-u_0|_2\,\sup_{|u_n|\leq\tau}\frac{|f(u_n)|}{|u_n|} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|\int_{|u_n(x)|\leq\tau} f(u_n)(u_n-u_0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}\ , \text{ para } |x| \geq R. \tag{5.18}$$

Além disso, $u_n \to 0$ em $L^s(B_R(0))$, para $s \in [2, 2^*)$, quando $n \to +\infty$. Então para $|x| \leq R$ e n suficientemente grande, usando (5.3) obtemos

$$\left|\int_{|u_n(x)|\leq\tau} f(u_n)(u_n-u_0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}\ , \text{ para } |x| \leq R. \tag{5.19}$$

Portanto, de (5.17), (5.18) e (5.19) concluímos que, para n suficientemente grande,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n-u_0)\right| \leq \varepsilon.$$

■

5.3 Conjuntos invariantes por fluxo descrecente

No que segue vamos considerar os cones convexos

$$E^+ = \{u \in E : u \geq 0\} \ \text{ e } \ E^- = \{u \in E : u \leq 0\}.$$

Ademais, para $u \in E$ denotamos $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$. Observe que se $u \in E$, então $u^\pm \in E^\pm$. Agora fixemos $\varepsilon > 0$ arbitrário e definamos os conjuntos

$$D_\varepsilon^+ = \{u \in E \mid dist(u, E^+) < \varepsilon\} \ \text{ e } \ D_\varepsilon^- = \{u \in E \mid dist(u, E^-) < \varepsilon\}$$

bem como $D_\varepsilon = \overline{D_\varepsilon^+} \cup \overline{D_\varepsilon^-}$. Note que, D_ε é simétrico, isto é, se $u \in D_\varepsilon$ tem-se que $-u \in D_\varepsilon$, fechado e $E \backslash D_\varepsilon$ contém somente funções nodais. Além disso, D_ε^+ e D_ε^- são subconjuntos abertos e convexos de E.

Lema 5.6 *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ vale:*

(i) $A(\partial D_\varepsilon^+) \subset D_\varepsilon^+$ e toda solução não trivial $u \in D_\varepsilon^+$ de (5.1) é positiva;

(ii) $A(\partial D_\varepsilon^-) \subset D_\varepsilon^-$ e toda solução não trivial $u \in D_\varepsilon^-$ de (5.1) é negativa.

Demonstração.

item (i)

Seja $d := \dfrac{1}{2}\left(\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N} a(x)\right) > 0$, então por (5.3) existe $K = K(d) > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq d|t| + K|t|^{p-1} \ , \ \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{5.20}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 2d|u-w|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} 2d|u-w|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u-w)|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} 2d|u-w|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u-w)|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u-w|^2 \\ &= ||u-w||^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|u-w|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2d}}\, ||u-w||. \tag{5.21}$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
|u^-|_2 = |u - u^+|_2 &= \min_{w \in E^+} |u - w|_2 \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2d}} \left(\min_{w \in E^+} ||u - w|| \right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2d}} \right) dist(u, E^+).
\end{aligned}
$$

De maneira análoga, usando a imersão contínua $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)(s \in [2, 2^*])$, temos que

$$
|u^\pm|_s \leq C_s \, dist(u, E^\mp) \tag{5.22}
$$

Observe que para $v \in E$

$$
\begin{aligned}
dist(v, E^+) &= dist(v^+ + v^-, E^+) \\
&\leq dist(v^+, E^+) + dist(v^-, E^+) \\
&= dist(v^-, E^+) \\
&\leq \inf_{w \in E^+} \{||v^- - w||\} \\
&\leq ||v^- - 0|| = ||v^-||.
\end{aligned}
$$

Para $u \in E$ seja $v = A(u) \in E$, então por (5.9), (5.20), (5.22), (5.21) , imersão contínua e desigualdade de Hölder, tem-se

$$
\begin{aligned}
dist(v, E^+)||v^-|| &\leq ||v^-||^2 \\
&= \langle v, v^- \rangle_E \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(u) v^- \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(u)^+ v^- + f(u)^- v^- \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)^- v^- \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(u^+)^- v^- + f(u^-)^- v^-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(u^-)v^- \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} (d|u^-| + K(d)|u^-|^{p-1})|v^-| \\
&\leq d|u^-|_2|v^-|_2 + K(d)|u^-|_p^{p-1}|v^-|_p \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\, dist(u,E^+) + \tilde{K}\, [dist(u,E^+)]^{p-1}\right) ||v^-||
\end{aligned}
$$

onde $\tilde{K} > 0$ é uma constante. Logo

$$
dist(A(u),E^+) \leq \frac{1}{2}\, dist(u,E^+) + \tilde{K}\, [dist(u,E^+)]^{p-1}\ ,\ u \in E. \tag{5.23}
$$

Afirmação: Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$
dist(A(u),E^+) \leq \frac{3}{4}\, dist(u,E^+)\ ,\ \forall\, u \in D_\varepsilon^+ \ \text{ e } \ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \tag{5.24}
$$

De fato, basta considerar $\varepsilon_0 = \left(\dfrac{1}{4\tilde{K}}\right)^{\frac{1}{p-2}}$. Pois dado $u \in D_\varepsilon^+$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, temos que

$$
\begin{aligned}
& dist(u,E^+) < \varepsilon \leq \left(\frac{1}{4\tilde{K}}\right)^{\frac{1}{p-2}} \\
\Rightarrow\ & \big[dist(u,E^+)\big]^{p-2} < \frac{1}{4\tilde{K}} \\
\Rightarrow\ & 0 < \frac{1}{4\tilde{K}} - dist(u,E^+)^{p-2} \\
\Rightarrow\ & 0 \leq \left[\frac{1}{4\tilde{K}} - dist(u,E^+)^{p-2}\right] \tilde{K}\ dist(u,E^+) \\
\Rightarrow\ & 0 \leq \frac{1}{4}\, dist(u,E^+) - \tilde{K}\ dist(u,E^+)^{p-1} \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{2}\, dist(u,E^+) + \tilde{K}\, [dist(u,E^+)]^{p-1} \leq \frac{3}{4}\, dist(u,E^+).
\end{aligned}
$$

Daí, usando (5.23), concluímos a prova da afirmação.

Agora seja $u \in \overline{D_\varepsilon^+}$, então existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D_\varepsilon^+$ tal que $u_n \to u$ em E, quando $n \to +\infty$.

Segue da afirmação que

$$
dist(A(u_n),E^+) \leq \frac{3}{4}\, dist(u_n,E^+) < \frac{3\varepsilon}{4}\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.25}
$$

Portanto, de (5.25), pela continuidade da função distância e do operador $A : E \to E$, segue que

$$\begin{aligned} dist(A(u), E^+) &= \lim_n [dist(A(u_n), E^+)] \\ &< \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $A(\overline{D_\varepsilon^+}) \subset D_\varepsilon^+$.

Por fim, sabendo que $\partial D_\varepsilon^+ \subset \overline{D_\varepsilon^+}$, concluímos que $A(\partial D_\varepsilon^+) \subset D_\varepsilon^+$ para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Além disso, se $u \in D_\varepsilon^+ (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ é tal que $A(u) = u$, então $u \in E^+$. De fato, caso $u \notin E^+$ existe $\delta > 0$ tal que $dist(u, E^+) \geq \delta$. Agora escolhendo $\varepsilon \leq \delta$ temos, por $A(u) = u$ e de (5.24), que

$$\varepsilon \leq \delta \leq dist(u, E^+) = dist(A(u), E^+) \leq \frac{3}{4} dist(u, E^+) < \varepsilon$$

o que é um absurdo.

Suponhamos que $\tilde{u} \in D_\varepsilon^+$ é solução, não trivial, do problema (5.1) assim

$$-\Delta \tilde{u} + a\tilde{u} = f(\tilde{u}) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

ou seja,

$$\tilde{u} = (-\Delta + a)^{-1} \cdot f(\tilde{u}) = A(\tilde{u}).$$

Pelo exposto anteriormente segue que $\tilde{u} \in E^+$, isto é, $\tilde{u} \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Agora suponhamos, por absurdo, que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\tilde{u}(x_0) = 0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} \tilde{u}(x). \tag{5.26}$$

Por outro lado, de (A_4), $f(\tilde{u}) \geq 0$ logo

$$(\Delta - a)(\tilde{u}) = -f(\tilde{u}) \leq 0.$$

Pelo Princípio do Máximo (ver Apêndice F Teorema F.2) segue que $\tilde{u}$ é constante em $\mathbb{R}^N$. Portanto, de (5.26) tem-se que $\tilde{u} \equiv 0$ o que é uma contradição, pois estamos supondo $\tilde{u} \neq 0$.

item (ii)

Análogo ao item (i). ■

Consideremos, como feito no Capítulo 4, W um campo **pseudo-gradiente** de vetores para J, $u_0 \in E_0$ e o (P.V.I)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = -W(u(t)) \ , \quad t \geq 0 \\ \qquad\qquad u(0) = u_0. \end{cases}$$

onde $E_0 = E \backslash K$ com $K = \{u \in E \mid J'(u) = 0\}$.

Seja $t \mapsto u(t, u_0)$ a curva de fluxo decrescente associada ao campo pseudo-gradiente W para o funcional J. Agora para $D \subset E$ um (c.i.f.d) definamos

$$C_E(D) = \{u_0 \in E \mid u(t', u_0) \in D \ \text{ para algum } \ t' \in [0, T(u_0))\}.$$

Além disso, ponhamos

$$\mathcal{A}_0 = \{v \in E \mid u(t_n, v) \to 0 \ \text{ para } \ \ t_n \to T(v)\}.$$

Decorre diretamente da definição que $\mathcal{A}_0 \cap K = \{0\}$, pois se $v \in K$, então $u(t, v) = v$ para todo $t \geq 0$. Ademais o conjunto $\mathcal{A}_0$ é aberto.

Lema 5.7 *Existe $M > 0$ tal que $||u(t, v)|| \leq M$ para todo $t \in [0, T(v))$ e todo $v \in \mathcal{A}_0$. E consequentemente $u(t, v)$ está definida para todo $t \in [0, +\infty)$.*

Demonstração.

Seja $v \in \mathcal{A}_0$, então $u(t_k, v) \to 0$ quando $t_k \to T(v)$. Por $t_k \to T(v)$, quando $k \to +\infty$, tem-se que dado $t' \in [0, T(v))$ existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t_k \geq t'$

para $k \geq k_1$. Assim,

$$\begin{aligned} J(v) \geq J(u(t',v)) &\geq J(u(t_k,v)) \\ &= \frac{1}{2}||u(t_k,v)||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u(t_k,v)) \\ &\geq \frac{1}{2}||u(t_k,v)||^2 - \varepsilon|u(t_k,v)|_2^2 - C(\varepsilon)|u(t_k,v)|_p^p \\ &\geq \frac{1}{2}||u(t_k,v)||^2 - \varepsilon C_1||u(t_k,v)||^2 - C(\varepsilon)C_2||u(t_k,v)||^p \\ &= ||u(t_k,v)||^2\left(\frac{1}{2} - \varepsilon C_1\right) - \tilde{C}||u(t_k,v)||^p \\ &= ||u(t_k,v)||^2\left[\left(\frac{1}{2} - \varepsilon C_1\right) - \tilde{C}||u(t_k,v)||^{p-2}\right] \end{aligned}$$

Por outro lado, dado $\eta > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0$ implica que

$$||u(t_k,v)|| < \eta.$$

Portanto, para $\eta = \left[\left(\frac{1}{2} - \varepsilon C_1\right)\frac{1}{\tilde{C}}\right]^{\frac{1}{p-2}}$, $\varepsilon < \frac{1}{2C_1}$ e $k \geq \max\{k_0, k_1\}$, temos que

$$J(v) \geq J(u(t',v)) \geq 0 \ , \ \forall \ v \in \mathcal{A}_0 \ , \ \forall \ t' \in [0, T(v)). \tag{5.27}$$

Segue, pelo Lema A.2 (ver Apêndice A), que se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é tal que $||u_n|| \to +\infty$, então $J(u_n) \to -\infty$.

Suponhamos que exista $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, T(v))$ tal que $||u(s_k,v)|| \to +\infty$ quando $k \to +\infty$, então $J(u(s_k,v)) \to -\infty$ o que, por (5.27), é um absurdo. Logo existe $M_1 > 0$ tal que, $||u(t,v)|| \leq M_1$ para todo $t \in [0, T(v))$. E pela Teoria de E.D.O em espaço de Banach temos que $T(v) = +\infty$.

Suponha que exista $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_0$ tal que $||u(t,v_j)|| \to +\infty$ quando $j \to +\infty$ e $t \in [0, T(v_j))$.

Assim para $t \in [0, T(v_j)$ segue que $J(u(t,v_j)) \to -\infty$ quando $j \to +\infty$ o que é um absurdo, ou seja, existe $M_2 > 0$ tal que $||u(t,v)|| < M_2$ para todo $v \in \mathcal{A}_0$ e $t \in [0, T(v))$.

Seja $M = \max\{M_1, M_2\} > 0$, então $||u(t,v)|| \le M$ para todo $t \in [0, T(v))$ e todo $v \in \mathcal{A}_0$. ■

Corolário 5.8 *Se $v \in \overline{\mathcal{A}_0}$, então $||u(s,v)|| \le M$ para todo $s \in [0, T(v))$.*

A partir de agora usaremos $\varepsilon_0 > 0$ encontrado no Lema 5.6.

Proposição 5.9 *Seja $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. Então existe um campo pseudo-gradiente para J tal que D_ε^+ e D_ε^- são (c.i.f.d). Além disso,*

$$\partial D_\varepsilon^+ \subset C_E(D_\varepsilon^+) \;\; e \;\; \partial D_\varepsilon^- \subset C_E(D_\varepsilon^-) \tag{5.28}$$

Demonstração.

Pelo Lema 5.6 existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $A(\partial D_\varepsilon^+) \subset D_\varepsilon^+$ e $A(\partial D_\varepsilon^-) \subset D_\varepsilon^-$ para $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. Sendo $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ e para cada $u \in E$ tem-se que $J'(u) = u - A(u)$, então pelo Lema 4.22 (ver Capítulo 4) existe um campo pseudo-gradiente de vetores W para J, o qual torna os conjuntos D_ε^+ e D_ε^- invariantes por fluxo decrescente. Além disso, tem-se $\partial D_\varepsilon^+ \subset C_E(D_\varepsilon^+)$ e $\partial D_\varepsilon^- \subset C_E(D_\varepsilon^-)$. ■

Lema 5.10 *Seja $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. Então $\overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-} \subset \mathcal{A}_0$. Em particular $J(u) \ge 0$ para todo $u \in \overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-}$.*

Demonstração.

Primeiramente mostraremos que

$$\inf_{u \in D_\varepsilon^+ \cap D_\varepsilon^-} J(u) > -\infty. \tag{5.29}$$

Para $u \in D_\varepsilon^+ \cap D_\varepsilon^-$, de (A_4), (5.3) e (5.22), temos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) \\ &\geq -\int_{\mathbb{R}^N} F(u) \\ &\geq -\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} f(u)u \\ &\geq -\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon|u| + K|u|^{p-1})|u| \\ &= -\frac{1}{\theta}\left(\varepsilon|u|_2^2 + K|u|_p^p\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq -\frac{1}{\theta}\left[2\varepsilon(|u^+|_2^2 + |u^-|_2^2) + 2^{p-1}K(|u^+|_p^p + |u^-|_p^p)\right] \\ &\geq -\frac{1}{\theta}\left[2\varepsilon([\varepsilon_0 C_2]^2 + [\varepsilon_0 C_2]^2) + 2^{p-1}K([\varepsilon_0 C_p]^p + [\varepsilon_0 C_p]^p)\right] \\ &= -\frac{1}{\theta}(2^2\varepsilon[\varepsilon_0 C_2]^2 + 2^p K[\varepsilon_0 C_p]^p) \end{aligned}$$

onde $\varepsilon_0 > 0$ é obtido no Lema 5.6. E com isso fica provado (5.29).

Vamos mostrar agora que $\overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-} \subset \mathcal{A}_0$. Seja $v \in \overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-}$, então se $v \equiv 0$ nada a fazer.

Seja $v \in (\overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-}) \backslash \{0\}$. De (5.28) e por definição $D_\varepsilon^\pm \subset C_E(D_\varepsilon^\pm)$, tem-se que $\overline{D_\varepsilon^\pm} \subset C_E(D_\varepsilon^\pm)$, ou seja, $\overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-} \subset C_E(D_\varepsilon^+) \cap C_E(D_\varepsilon^-) = C_E(D_\varepsilon^+ \cap D_\varepsilon^-)$ e com isso existe $t' \in [0, T(v))$ para o qual $u(t', v) \in D_\varepsilon^+ \cap D_\varepsilon^-$.

Logo, de (5.29) e por $t \mapsto J(u(t,v))$ ser decrescente, obtemos

$$-\infty < \inf_{u \in D_\varepsilon^+ \cap D_\varepsilon^-} J(u) \leq J(u(t', v)) \leq J(v)\ ,\ \forall\, v \in \overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-}.$$

Daí,

$$-\infty < \inf_{v \in \overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-}} J(v). \tag{5.30}$$

Além disso segue, da Proposição 4.15 (Capítulo 4) e do Lema 5.6, que

$$(\overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-}) \cap K = \{0\}.$$

Neste momento estamos nas condições do Teorema 4.11 (ver Capítulo 4) com isso, como feito em sua demonstração, podemos garantir a existência de uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, T(v))$ tal que

$$\lim_{t_n \to T(v)} u(t_n, v) = u^* \in (\overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-}) \cap K.$$

Portanto,

$$\lim_{t_n \to T(v)} u(t_n, v) = 0.$$

Mostrando que $v \in \mathcal{A}_0$.

Agora mostraremos que $J(u) \geq 0$ para todo $u \in \overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-}$. De fato, dado $v \in \overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-}$ tem-se que

$$J(u(t, v)) \leq J(v) \ , \ \forall\, t \in [0, T(v)).$$

Seja $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, T(v))$ uma sequência crescente tal que $t_n \to T(v)$. Daí, $\{J(u(t_n, v))\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é uma sequência monótona decrescente e de (5.30) é limitada inferiormente, então converge para o ínfimo, isto é,

$$\lim_{t_n \to T(v)} J(u(t_n, v)) = \inf_{n\in\mathbb{N}} J(u(t_n, v)).$$

Por outro lado, $\overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-} \subset \mathcal{A}_0$ assim $u(t_n, v) \to 0$ quando $t_n \to T(v)$. Usando a continuidade do funcional J e a unicidade do limite temos que

$$J(v) \geq J(u(t_n, v)) \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} J(u(t_n, v)) = 0.$$

Portanto, $J(v) \geq 0$ para todo $v \in \overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-}$, isto é,

$$\inf_{u \in \overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-}} J(u) \geq 0.$$

■

Lema 5.11 *Existe $R > 0$ tal que $J(u) \leq -1$ para todo $u \in C \backslash B_R(0)$, onde $C = \{tu : t \geq 0, u \in E\}$.*

Demonstração.

Usando o Lema A.2 (ver Apêndice A), para $v \in C$, tem-se

$$\begin{aligned} J(v) = J(tu) &= \frac{t^2}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(tu) \\ &\le \frac{t^2}{2}||u||^2 - t^\theta |u|_\theta^\theta + t^2 |u|_2^2 \\ &\le \frac{t^2}{2}||u||^2 - t^\theta |u|_\theta^\theta + t^2 \tilde{c} ||u||^2, \end{aligned}$$

ou seja, para $t \to +\infty$, sendo $\theta > 2$, segue que $J(v) \to -\infty$. Logo existe $R > 0$ tal que

$$J(u) \le -1 \;\text{ para todo }\; u \in C \backslash B_R(0).$$

■

Demonstração. Teorema 5.1

Consideremos o conjunto nodal

$$\mathcal{M} = \{u \in E : u^\pm \neq 0 \;\text{ e }\; J'(u^\pm) \cdot u^\pm = 0\}.$$

e

$$\beta = \inf_{u \in \mathcal{M}} J(u).$$

De maneira similar, como feito anteriormente, mostra-se que $\mathcal{M}$ contém todas as soluções nodais do problema (5.1). Seja $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência minimizante em $\mathcal{M}$, isto é,

$$\lim_n J(v_n) = \beta.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos o conjunto

$$\mathcal{C}_n = \{tv_n^+ + sv_n^- : t \ge 0, s \ge 0\}.$$

Usando a hipótese (A_6), por um argumento padrão, segue que

$$J(v_n^\pm) = \max_{t \ge 0} J(tv^\pm).$$

Com isso

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} J(\mathcal{C}_n) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} J(tv_n^+ + sv_n^-)\ , \quad \text{para} \ \ t\geq 0, s\geq 0 \\
&= \max_{t\geq 0} J(tv_n^+) + \max_{s\geq 0} J(sv_n^-) \\
&= J(v_n^+) + J(v_n^-) = J(v_n).
\end{aligned}$$

Observe que, pelo Lema 5.11, existe $R_n > 0$ tal que

$$J(u) \leq -1\ ,\ \forall\, u \in \mathcal{C}_n \backslash B_{R_n}(0). \tag{5.31}$$

Agora, para cada $t \in [0,1]$, definamos o caminho

$$h_n(t) = t\frac{2R_n}{||v_n^+||}v_n^+ + (1-t)\frac{2R_n}{||v_n^-||}v_n^-.$$

Afirmamos que $h_n(t) \in \mathcal{C}_n \backslash B_{R_n}(0)$ para todo $t \in [0,1]$.

De fato, seja $t \in [0,1]$, temos que

$$\begin{aligned}
||h_n(t)||^2 &= \left\| t\frac{2R_n}{||v_n^+||}v_n^+ \right\|^2 + \left\langle t\frac{2R_n}{||v_n^+||}v_n^+, (1-t)\frac{2R_n}{||v_n^-||}v_n^- \right\rangle_E + \left\|(1-t)\frac{2R_n}{||v_n^-||}v_n^-\right\|^2 \\
&= \left\| t\frac{2R_n}{||v_n^+||}v_n^+ \right\|^2 + \left\|(1-t)\frac{2R_n}{||v_n^-||}v_n^-\right\|^2 \\
&= 4t^2R_n^2 + 4(1-t)^2R_n^2 \\
&= 4R_n^2(2t^2 - 2t + 1) \\
&\geq 4R_n^2\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 2R_n^2.
\end{aligned}$$

Daí,

$$||h_n(t)|| \geq R_n\sqrt{2} \geq R_n\ ,\ \forall\, t \in [0,1].$$

Consequentemente

$$J(h_n(t)) \leq -1 \ \ \text{para todo} \ \ t \in [0,1]. \tag{5.32}$$

Portanto, $t \mapsto h_n(t)$ é um caminho conectando

$$h_n(0) \in D_\varepsilon^- \backslash D_\varepsilon^+ \ \text{ e } \ h_n(1) \in D_\varepsilon^+ \backslash D_\varepsilon^- \ \text{ em } \ \mathcal{C}_n \backslash B_{R_n}(0).$$

Além disso, pelo Lema 5.10 e (5.32), temos

$$\sup_{t \in [0,1]} J(h_n(t)) \leq -1 < 0 \leq \inf_{u \in \overline{D_\varepsilon^+} \cap \overline{D_\varepsilon^-}} J(u).$$

Neste momento estamos nas hipóteses do Teorema 4.23 (Capítulo 4) com isso podemos garantir a existência de pontos críticos para o funcional J nos seguintes conjuntos:

(i) $u_+ \in D_\varepsilon^+ \backslash \overline{D_\varepsilon^-}$;

(ii) $u_- \in D_\varepsilon^- \backslash \overline{D_\varepsilon^+}$;

(iii) $\overline{u} \in E \backslash (\overline{D_\varepsilon^+} \cup \overline{D_\varepsilon^-})$.

Usando o Lema 5.6 concluímos que $u_+ > 0 > u_-$.

Até agora mostramos a existência de três soluções para o problema (5.1) sendo uma positiva uma negativa e uma nodal. Para concluir a demonstração do Teorema 5.1 vamos mostrar a existência de uma solução nodal de **energia mínima** que possui exatamente dois domínios nodais.

Para isto defina a aplicação contínua

$$\begin{aligned} H_n : \ \ [0,1] \times [0,1] \ &\longrightarrow E \\ (t,s) \ \ \ \ \ \ \ \ &\longmapsto H_n(t,s) = s h_n(t). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{A}_0$, $C_E(D_\varepsilon^+)$ e $C_E(D_\varepsilon^-)$ subconjuntos abertos de E, então

$$\mathcal{O}_n = H_n^{-1}(\mathcal{A}_0) \ , \ \mathcal{O}_n^+ = H_n^{-1}(C_E(D_\varepsilon^+)) \ \text{ e } \ \mathcal{O}_n^- = H_n^{-1}(C_E(D_\varepsilon^-))$$

são subconjuntos abertos de $Q = [0,1] \times [0,1]$. Além disso,

(i) $\{(t,0) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathcal{O}_n$;

(ii) $\{(t,1) \mid 0 \leq t \leq 1\} \cap \mathcal{O}_n = \emptyset$.

Prova de (i)

Segue da definição do conjunto $\mathcal{O}_n$.

Prova de (ii).

Suponha que exista $(t_0, 1) \in \mathcal{O}_n$, $0 \leq t_0 \leq 1$, então

$$u(t_k, h_n(t_0)) \to 0 \text{ quando } t_k \to T(h_n(t_0))$$

para alguma $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, T(h_n(t_0))]$. Já que

$$\mathcal{O}_n = H_n^{-1}(\mathcal{A}_0) = \{(t,s) \in Q \mid H_n(t,s) \in \mathcal{A}_0\}.$$

Portanto, pela continuidade do funcional J, por (5.31) e pela aplicação $t \mapsto J(u(t, h_n(t_0)))$ ser decrescente, temos

$$0 = \lim_{t_k \to T(h_n(t_0))} J(u(t_k, h_n(t_0))) \leq J(h_n(t_0)) \leq -1$$

o que é um absurdo.

Chegamos nas mesmas hipóteses do Lema 4.20 (Capítulo 4) e com isso podemos garantir a existência de uma componente conexa Γ_n de $\partial_Q \mathcal{O}_n$ tal que

$$\{(0,s); 0 \leq s \leq 1\} \cap \Gamma_n \neq \emptyset$$
$$\{(1,s); 0 \leq s \leq 1\} \cap \Gamma_n \neq \emptyset.$$

Temos ainda que

$$H_n(0,s) = sh_n(0) \in D_\varepsilon^- \text{ e } H_n(1,s) = sh_n(1) \in D_\varepsilon^+,$$

ou seja,

$$\{(0,s) : 0 \leq s \leq 1\} \subset \mathcal{O}_n^- \text{ e } \{(1,s) : 0 \leq s \leq 1\} \subset \mathcal{O}_n^+.$$

Observe que pelo Lema 5.10 temos que $C_E(D_\varepsilon^+) \cap C_E(D_\varepsilon^-) \subset \mathcal{A}_0$.

Afirmação 1: Se $(t,s) \in \Gamma_n \subset \partial_Q \mathcal{O}_n$, então $H_n(t,s) \in \partial \mathcal{A}_0$.

Basta mostrar que existem sequências $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_0$ e $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset E\backslash\mathcal{A}_0$ tais que

$$A_j \to H_n(t,s) \text{ e } B_j \to H_n(t,s) \text{ quando } j \to +\infty.$$

Seja $(t,s) \in \Gamma_n \subset \partial_Q \mathcal{O}_n$, então existe $\{(x_j,y_j)\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}_n = H_n^{-1}(\mathcal{A}_0) = \{(t,s) \in Q \mid H_n(t,s) \in \mathcal{A}_0\}$ tal que $(x_j,y_j) \to (t,s)$ quando $j \to +\infty$ e consequentemente $H_n((x_j,y_j)) \in \mathcal{A}_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí, sendo H_n contínua, temos

$$H_n((x_j,y_j)) \to H_n((t,s)).$$

Agora se $(t,s) \in \partial_Q \mathcal{O}_n$ temos que existe $\{(a_j,b_j)\}_{j\in\mathbb{N}} \subset Q\backslash\mathcal{O}_n$ tal que $(a_j,b_j) \to (t,s)$ quando $j \to +\infty$ e consequentemente $H_n((a_j,b_j)) \in E\backslash\mathcal{A}_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí, sendo H_n contínua, temos

$$H_n((a_j,b_j)) \to H_n((t,s)).$$

Concluímos que $H_n(t,s) \in \partial\mathcal{A}_0$.

Pela Afirmação 1 e por $C_E(D_\varepsilon^+) \cap C_E(D_\varepsilon^-) \subset \mathcal{A}_0$ segue que

$$\Gamma_n \cap \mathcal{O}_n^+ \cap \mathcal{O}_n^- = \emptyset.$$

Com isso podemos considerar $(t_n,s_n) \in \Gamma_n\backslash(\mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-)$ e definir

$$w_n^* := H_n(t_n,s_n) \in \partial\mathcal{A}_0\backslash[C_E(D_\varepsilon^+) \cup C_E(D_\varepsilon^-)].$$

Recorde que

$$\omega(w_n^*) = \{v \in E : u(t_k, w_n^*) \to v \text{ para alguma } t_k \to T(w_n^*)\}.$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos mostrar que dado

$$u_n \in \omega(w_n^*) \subset \partial\mathcal{A}_0\backslash[C_E(D_\varepsilon^+) \cup C_E(D_\varepsilon^-)]$$

tem-se que u_n é solução nodal do problema (5.1).

Pelo fato de que $w_n^* \in \partial\mathcal{A}_0 \subset \overline{\mathcal{A}_0}$ e usando o Corolário 5.8 temos que $T(w_n^*) = +\infty$.

Afirmação 2: Se $T(w_n^*) = +\infty$, então existe uma sequência crescente $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$ tal que

$$||J'(u(s_k, w_n^*))|| \to 0 \ \text{ quando } \ k \to +\infty.$$

Primeiramente mostremos a existência de uma sequência crescente $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$ tal que $s_k \to +\infty$ e

$$\left[\frac{d}{dt}J(u(t, w_n^*))\right]_{t=s_k} \longrightarrow 0\ , \ \text{quando} \ \ k \to +\infty. \tag{5.33}$$

De fato, basta considerar $t_k = k$ e o intervalo $[k, k+1]$, então usando o Teorema do Valor Médio (ver Apêndice F Teorema F.7) na aplicação $t \mapsto J(u(t, w_n^*))$ vai existir $s_k \in [k, k+1]$ tal que

$$\left[\frac{d}{dt}J(u(t, w_n^*))\right]_{t=s_k} = J(u(t_{k+1}, w_n^*)) - J(u(t_k, w_n^*))$$

Sendo $\{J(u(t_k, w_n^*))\}_{k\in\mathbb{N}}$ decrescente e limitada inferiormente, então $\{J(u(t_k, w_n^*))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ou seja, $J(u(t_{k+1}, w_n^*)) - J(u(t_k, w_n^*)) \to 0$ quando $k \to +\infty$.

Com isso,

$$\begin{aligned} 0 \leq ||J'(u(s_k, w_n^*))||^2 &\leq 2\,\langle J'(u(s_k, w_n^*)), W(u(s_k, w_n^*))\rangle \\ &= 2\left\langle J'(u(s_k, w_n^*)), \left[-\frac{d}{dt}u(t, w_n^*)\right]_{t=s_k}\right\rangle \\ &= -2\left[\frac{d}{dt}J(u(t, w_n^*))\right]_{t=s_k}. \end{aligned}$$

Logo, de (5.33), temos

$$||J'(u(s_k, w_n^*))|| \to 0 \ \text{ quando } \ k \to +\infty.$$

Afirmação 3: Se $u_n \in \omega(w_n^*)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então u_n é uma solução nodal.

De fato, note que $(D_\varepsilon^+ \cup D_\varepsilon^-) \subset [C_E(D_\varepsilon^+) \cup C_E(D_\varepsilon^-)]$. Então se $u_n \in \omega(w_n^*)$ temos que $u_n^\pm \neq 0$. Agora vamos mostrar que $J'(u_n^\pm) \cdot v = 0$ para todo $v \in E$. Por $u_n \in \omega(w_n^*)$ temos que $u(t_k, w_n^*) \to u_n$ para alguma $t_k \to +\infty$.

Agora consideremos a sequência $\{u(s_k, w_n^*)\}_{k \in \mathbb{N}}$ obtida na afirmação 2 e usando a unicidade de solução do (P.V.I) temos que $u(s_k, w_n^*) \to u_n$ em E quando $k \to +\infty$.

Logo, se $v \in E$ com $||v|| \leq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
0 \leq ||J'(u_n) \cdot v|| &\leq ||J'(u_n)|| \, ||v|| \\
&= \lim_{k \to +\infty} ||J'(u(s_k, w_n^*))|| \, ||v|| \\
&\leq \lim_{k \to +\infty} ||J'(u(s_k, w_n^*))|| \to 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $J'(u_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\beta \leq J(u_n) &= \lim_{k \to +\infty} J(u(t_k, w_n^*)) \\
&\leq J(w_n^*) \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq 1, s \geq 0} J\left(s\left(t\frac{2R_n v_n^+}{||v_n^+||} + (1-t)\frac{2R_n v_n^-}{||v_n^-||}\right)\right) \\
&\leq \sup J(\mathcal{C}_n) \\
&= J(v_n^+) + J(v_n^-) \\
&= J(v_n) = \beta + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Resumindo

- $J(u_n) = \beta + o_n(1)$;
- $J'(u_n) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Pela condição PS temos que, a menos de subsequência, existe $\overline{u} \in E$ tal que $u_n \to \overline{u}$ em E. Consequentemente, pela continuidade do funcional J, $J(\overline{u}) = \beta$. Usando o Teorema 1.12 (ver capítulo 1) concluímos que $\overline{u}$ é solução do problema (5.1).

Afiirmação 4 $\overline{u}$ tem exatamente dois domínios nodais.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que existam Ω_1, Ω_2 e Ω_3 domínios nodais para $\overline{u}$ tais que $\overline{u}\chi_{\Omega_1} > 0$ e $\overline{u}\chi_{\Omega_2} < 0$. Seja Ω^* o domínio nodal de $\overline{u}$. Temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)(\overline{u}\chi_{\Omega^*})^2 = \int_{\Omega^*} a(x)(\overline{u})^2 + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega^*} a(x)(\overline{u}\chi_{\Omega^*})^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} a(x)(\overline{u})^2 < \infty,$$

ou seja, $\overline{u}\chi_{\Omega^*} \in E$. Não é difícil verificar que $\overline{u}\chi_{\Omega_1\cup\Omega_2} \in \mathcal{M}$ e

$$\langle J'(\overline{u}\chi_{\Omega^*}), \overline{u}\chi_{\Omega^*}\rangle = \langle J'(\overline{u}), \overline{u}\chi_{\Omega^*}\rangle = 0. \tag{5.34}$$

Daí, por (5.34) e pela condição de Ambrosetti-Rabinowitz, temos

$$\begin{aligned} J(\overline{u}\chi_{\Omega^*}) &= \frac{1}{2}||\overline{u}\chi_{\Omega^*}||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(\overline{u}\chi_{\Omega^*}) \\ &\geq \frac{1}{2}||\overline{u}\chi_{\Omega^*}||^2 - \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} f(\overline{u}\chi_{\Omega^*})\overline{u}\chi_{\Omega^*} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||\overline{u}\chi_{\Omega^*}||^2 > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\beta \leq J(\overline{u}\chi_{\Omega_1\cup\Omega_2}) < J(\overline{u}\chi_{\Omega_1\cup\Omega_2}) + J(\overline{u}\chi_{\Omega_3}) \leq J(\overline{u}) = \beta$$

o que é um absurdo. ■

Observação 5.12 *O leitor pode perceber que a técnica desenvolvida no Capítulo 1 pode ser utilizada para a obtenção de solução nodal para problemas em $\mathbb{R}^N$ onde há compacidade, ver Proposição 3.1 em Bartsch, Weth e Willem [5]. Por outro lado utilizando um truncamento adequado sobre a não linearidade f de um determinado problema em $\mathbb{R}^N$, por exemplo*

$$f(t) = 0 \ \ \forall\, t \leq 0,$$

podemos obter solução positiva e com um truncamento análogo mostra-se também a existência de uma solução negativa, ambos os casos via Método de Nehari.

Para o estudo da Equação de Schrödinger superlinear utilizamos uma ferramenta sofisticada que é conjuntos invariantes por fluxo decrescente. Poderíamos utilizar a técnica estudada no Capítulo 1 para resolver este problema, porém há uma ordem cronológica envolvida. O estudo feito no Capítulo 1 (ver [5]) vem logo após o estudo do problema de Schrödinger superlinear (ver [6]).

Apêndice A

Regularidade do Funcional

A.1 Funcional estudado no Capítulo 1

Agora mostraremos que o funcional I está bem definido e é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$I'(u) \cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(u)v \ , \ \forall \ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Lema A.1
Sob as hipóteses (f_1) e (f_4) tem-se que a aplicação $t \longmapsto f(t)$ é crescente.

Demonstração.
Pela condição (f_1) temos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{|t|} = 0. \tag{A.1}$$

Pela continuidade de f

$$f(0) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} |t| \ \frac{f(t)}{|t|} = 0.$$

Agora note que, por (f_4) e (A.1) temos

$$\frac{f(t_2)}{|t_2|} < \frac{f(t_1)}{|t_1|} < 0 \tag{A.2}$$

para $t_2 < t_1 < 0$. Observe que se $\dfrac{f(t_2)}{|t_2|} < 0$ então $f(t_2) < 0$ pois $|t_2| > 0$. Multiplicando (A.2) por $|t_1|$ temos

$$|t_1|\frac{f(t_2)}{|t_2|} < |t_1|\frac{f(t_1)}{|t_1|} < 0,$$

assim

$$f(t_2) < \frac{|t_1|}{|t_2|}f(t_2) < f(t_1)$$

sempre que $t_2 < t_1 < 0$. De maneira análoga mostra-se que $f(t_2) < f(t_1)$ para $0 < t_2 < t_1$. ■

Lema A.2 *Se vale* (f_3), *então existem* $c_1, c_2 > 0$ *tais que*

$$F(t) \geq c_1|t|^\theta - c_2|t|^2 \ , \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração.

Se $t = 0$ nada a fazer já que $F(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Fixemos, arbitrariamente, $k_0 > 0$ e consideremos $|t| \geq k_0$.

Pela condição (f_3) temos que

$$\frac{\theta}{t} \leq \frac{f(t)}{F(t)} \ , \ t \geq k_0. \tag{A.3}$$

$$\frac{\theta}{t} \geq \frac{f(t)}{F(t)} \ , \ t \leq -k_0. \tag{A.4}$$

Integrado (A.3) de k_0 até t, e usando a monotonicidade do logaritmo, obtemos

$$F(t) \geq \frac{|t|^\theta}{|k_0|^\theta}\, F(k_0) \ , \ t \geq k_0.$$

De maneira análoga, integrando (A.4) de t até $-k_0$, temos

$$F(t) \geq \frac{|t|^\theta}{|-k_0|^\theta}\, F(-k_0) \ , \ t \leq -k_0.$$

Seja $m = \min\{F(k_0), F(-k_0)\} > 0$, então

$$F(t) \geq \frac{m}{|k_0|^\theta}|t|^\theta \ , \ |t| \geq k_0.$$

Defina $c_1 = \dfrac{m}{|k_0|^\theta} > 0$ e $c_2 = c_1\ (k_0)^{\theta-2} > 0$.
Portanto para $|t| \geq k_0$ tem-se

$$F(t) \geq c_1|t|^\theta - c_2|t|^2.$$

Para $|t| \leq k_0$

$$\begin{aligned} c_1|t|^\theta &= c_1|t|^{\theta-2}\ |t|^2 \\ &= \frac{c_2}{(k_0)^{\theta-2}}\ |t|^{\theta-2}\ |t|^2 \\ &= \left(\frac{|t|}{k_0}\right)^{\theta-2} c_2|t|^2 \\ &\leq c_2|t|^2 \end{aligned}$$

donde segue que

$$c_1|t|^\theta - c_2|t|^2 \leq 0 \leq F(t).$$

Concluímos que

$$F(t) \geq c_1|t|^\theta - c_2|t|^2\ ,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

■

Observação A.3 *Para cada $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ defina a aplicação*

$$\begin{aligned} h:\ [0,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h(t) = I(tu). \end{aligned}$$

Segue do Lema A.2 que

$$\begin{aligned} I(tu) &= \frac{t^2}{2}||u||^2 - \int_\Omega F(tu) \\ &\leq \frac{t^2}{2}||u||^2 - c_1 t^\theta \int_\Omega |u|^\theta + c_2\ t^2 \int_\Omega |u|^2 \\ &\leq t^\theta \left[t^{2-\theta}||u||^2 \left(\tilde{c} + \frac{1}{2}\right) - c_1 |u|^\theta_{L^\theta(\Omega)} \right]. \end{aligned}$$

Portanto, sendo $\theta > 2$ e $|u|^\theta_{L^\theta(\Omega)} > 0$, temos

$$I(tu) \longrightarrow -\infty \ \ \textit{sempre que} \ \ t \longrightarrow +\infty.$$

Lema A.4
Supondo que sejam válidas as condições $(f_1), (f_2)$ e (f_4), então para $\varepsilon > 0$ existe $C = C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \varepsilon |t| + C|t|^{p-1} \ , \ \forall \, t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração.

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, por (f_1), existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \varepsilon |t| \ , \ |t| \leq \delta. \tag{A.5}$$

Por outro lado, (f_2) nos garante que

$$|f(t)| \leq |t|^{p-1} \, a_1 \ , \ |t| \geq R \tag{A.6}$$

para algum $R > 0$ fixado. Para $|t| \leq R$, pelo Lema A.1, temos que

$$f(-R) \leq f(t) \leq f(R),$$

então, $|f(t)| \leq |f(\pm R)|$. Agora consideremos

$$|f(t)| \leq \max\{|f(R)|, |f(-R)|\}.$$

Assim fazendo $t = |R| = \pm R$ em (A.6) temos que

$$\max\{|f(R)|, |f(-R)|\} \leq a_1 (R)^{p-1}.$$

Temos então,

$$|f(t)| \leq a_1 (R)^{p-1} \ \text{ para } \ |t| \leq R. \tag{A.7}$$

Segue, de (A.5), (A.6) e (A.7), que

$$|f(t)| \leq \varepsilon |t| + a_1 (R)^{p-1} + a_1 |t|^{q-1} \ , \ t \in \mathbb{R}.$$

Defina $C = \left(a_1 + \dfrac{a_1(R)^{p-1}}{(\delta)^{p-1}} \right) > 0$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
|f(t)| &\leq \varepsilon|t| + \frac{a_1(R)^{p-1}}{(\delta)^{p-1}}|t|^{p-1} + a_1|t|^{p-1} \\
&= \varepsilon|t| + \left(a_1 + \frac{a_1(R)^{p-1}}{(\delta)^{p-1}} \right) |t|^{p-1} \\
&= \varepsilon|t| + C|t|^{p-1} \ , \ \forall \, t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

■

Observação A.5
Uma consequência da Proposição A.4 é que

$$
\begin{aligned}
|F(t)| &\leq \int_\Omega \varepsilon|t| + C|t|^{p-1} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}|t|^2 + \frac{C}{p}|t|^p \ , \ \forall \, t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

e com isso temos que o funcional associado ao problema (1.1)

$$
\begin{aligned}
I : \ H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
u &\longmapsto I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u)
\end{aligned}
$$

está bem definido.

Proposição A.6 *A aplicação*

$$
\begin{aligned}
I_1 : \ H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
u &\longmapsto I_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2
\end{aligned}
$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ *com*

$$I_1'(u) \cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v \ , \ \forall \, u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração.

Existência da Derivada de Gâteaux

Sabendo que

$$||u||^2 = \langle u, u \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla u = \int_\Omega |\nabla u|^2$$

então,

$$\begin{aligned} D_G I_1(u) \cdot v = \lim_{t \to 0} \frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} &= \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0} \frac{\langle u+tv, u+tv\rangle - \langle u, u\rangle}{t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} \frac{\langle u, u\rangle + 2\langle u, tv\rangle + \langle tv, tv\rangle - \langle u, u\rangle}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2t\langle u, v\rangle}{2t} + \frac{t^2\langle v, v\rangle}{2t}\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\langle u, v\rangle + \frac{t\langle v, v\rangle}{2}\right) \\ &= \langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v. \end{aligned}$$

Continuidade da Derivada de Gâteaux

Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $||u_n - u|| \longrightarrow 0$.

Para $v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, usando a Desigualdade de Schwarz, tem-se que

$$\begin{aligned} |D_G I_1(u_n) \cdot v - D_G I_1(u) \cdot u| &= |\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle| \\ &= |\langle u_n - u, v\rangle| \\ &\leq ||u_n - u||\, ||v||. \end{aligned}$$

Portanto,

$$||D_G I_1(u_n) - D_G I_1(u)||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{||v|| \neq 0} \frac{|D_G I_1(u_n) \cdot v - D_G I_1(u) \cdot u|}{||v||} \leq ||u_n - u||$$

mostrando que

$$||D_G I_1(u_n) - D_G I_1(u)||_{H^{-1}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

quando $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$ e consequentemente a continuidade da derivada de Gâteaux do funcional I_1. Pelo Teorema F.1 concluímos que $I_1 \in$

$C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ com

$$I_1'(u)\cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v \ , \ \forall\ u,v\in H_0^1(\Omega).$$

■

Proposição A.7 *A aplicação*

$$\begin{aligned} I_2:\ \ H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \quad &\longmapsto I_2(u)=\int_\Omega F(u) \end{aligned}$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ *com*

$$I_2'(u)\cdot v = \int_\Omega f(u)v \ , \ \forall\ u,v\in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. De maneira análoga, ao roteiro seguido na proposição anterior, vamos mostrar que existe a derivada de Gâteaux e depois verificar que essa derivada é contínua e na sequência aplicar o Teorema F.1.

Fixados $u,v\in H_0^1(\Omega)$ arbitrários e considerando $0<|t|<1$ defina, para cada $x\in\Omega$, a função

$$\begin{aligned} \rho:\ \ [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s \quad &\longmapsto \rho(s)=F(u(x)+s\ t\ v(x)) \end{aligned}$$

claramente ρ é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta\in(0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} & \rho(1)-\rho(0)=\rho'(\theta)\ (1-0) \\ \Leftrightarrow\ \ & F(u+tv)-F(u)=f(u+\theta\ t\ v)\ tv \\ \Leftrightarrow\ \ & \frac{F(u+tv)-F(u)}{t}=f(u+\theta\ t\ v)\ v. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Integrando sobre Ω e passando ao limite em (A.8), quando $t\to 0$, temos que

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\int_\Omega f(u+\theta\ t\ v)\ v. \tag{A.9}$$

Afirmação 1:

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega f(u+\theta\ t\ v)\ v=\int_\Omega f(u)\ v.$$

Vamos utilizar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para mostra a afirmação acima.

Seja $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(0,1)$ tal que $t_n\longrightarrow 0$ quando $n\to+\infty$ e defina a seguinte sequência

$$g_n(x)=f(u(x)+\theta\ t_n\ v(x))\ v(x).$$

Segue da continuidade da $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ que

$$g_n(x)\longrightarrow f(u(x))\ v(x)\ \text{ q.t.p em }\ \Omega\ \text{ sempre que }\ n\to+\infty.$$

Vamos mostrar agora que a sequência $g_n(x)$ é dominada por um elemento de $L^1(\Omega)$.

Segue, pelo Lema A.4, que

$$\begin{aligned}|g_n(x)| &\leq [\varepsilon|u(x)+\theta\ t_n\ v(x)|+C|u(x)+\theta\ t_n\ v(x)|^{p-1}]|v(x)|\\ &\leq \varepsilon|u(x)|\ |v(x)|+C\ 2^{p-1}(|u(x)|^{p-1}\ |v(x)|+|v(x)|^p).\end{aligned}$$

Segue da Desigualdade de Hölder que $\varepsilon|u|\ \ |v|\ \in\ L^1(\Omega)$. Da Imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ tem-se que $|v|^p\in L^1(\Omega)$ e sendo $|u|^{p-1}\in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ e $|v|\in L^p(\Omega)$, utilizando a Desigualdade de Hölder, obtemos $|u|^{p-1}\ |v|\in L^1(\Omega)$.

Mostrando que

$$\varepsilon|u|\ |v|+C\ 2^{p-1}(|u|^{p-1}\ |v|+|v|^p)\in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue segue a afirmação.

Até o momento mostramos a existência da derivada de Gâteaux

$$D_GI_2(u)\cdot v=\lim_{t\to 0}\int_\Omega\frac{F(u+tv)-F(u)}{t}=\int_\Omega f(u)\ v.$$

Afirmação 2: A derivada de Gâteaux de I_2 é contínua.

De fato, seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $||u_n - u|| \longrightarrow 0$. Por imersão contínua $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$ e com isso segue, do Teorema D.3, que existe uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

(a) $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p de Ω;

(b) $|u_n(x)| \leq h(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A partir do item (a) e da continuidade da função f concluímos que

$$|f(u_n) - f(u)|^{\frac{p}{p-1}} \longrightarrow 0 \ \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

Usando o item (b) e o fato de que $(a+b)^p \leq 2^p \cdot (a^p + b^p)$ se $1 \leq p < \infty$ e $a, b \geq 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
|f(u_n) - f(u)|^{\frac{p}{p-1}} &\leq 2^{\frac{p}{p-1}}(|f(u_n)|^{\frac{p}{p-1}} + |f(u)|^{\frac{p}{p-1}}) \\
&\leq 2^{\frac{p}{p-1}}\left[(\varepsilon|u_n| + C|u_n|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} + (\varepsilon|u| + C|u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}\right] \\
&\leq 2^{\frac{p}{p-1}}\left[(2\varepsilon)^{\frac{p}{p-1}}|u_n|^{\frac{p}{p-1}} + (C)^{\frac{p}{p-1}}|u_n|^p + (2\varepsilon)^{\frac{p}{p-1}}|u|^{\frac{p}{p-1}} + (C)^{\frac{p}{p-1}}|u|^p\right] \\
&= C_1(|u_n|^{\frac{p}{p-1}} + |u|^{\frac{p}{p-1}}) + C_2(|u_n|^p + |u|^p) \\
&\leq C_1(|h|^{\frac{p}{p-1}} + |u|^{\frac{p}{p-1}}) + C_2(|h|^p + |u|^p).
\end{aligned}$$

Claramente, por Imersão Contínua, $C_2(|h|^p + |u|^p) \in L^1(\Omega)$. Lembres-se que $p \in (2, 2^*)$ e note que

$$|h|^{\frac{p}{p-1}} = |h| \ |h|^{\frac{1}{p-1}}$$

onde $|h| \in L^p(\Omega)$ e $|h|^{\frac{1}{p-1}} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ sendo p e $\dfrac{p}{p-1}$ expoentes conjugados, pela Desigualdade de Hölder, segue

$$|h| \ |h|^{\frac{1}{p-1}} \in L^1(\Omega).$$

De maneira análoga mostra-se que $|u|^{\frac{p}{p-1}} \in L^1(\Omega)$. Com isso

$$C_1(|h|^{\frac{p}{p-1}} + |u|^{\frac{p}{p-1}}) \in L^1(\Omega).$$

Até o momento mostramos que $|f(u_n)-f(u)|^{\frac{p}{p-1}} \to 0$ q.t.p em Ω e é dominada por uma função de $L^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega |f(u_n) - f(u)|^{\frac{p}{p-1}} \longrightarrow 0\ ,\ \text{quando}\ \ n \to +\infty. \tag{A.10}$$

Por fim para $v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, usando a Desigualdade de Hölder e imersão, temos que

$$\begin{aligned} |D_G I_2(u_n)\cdot v - D_G I_2(u)\cdot v| &\leq \int_\Omega |f(u_n) - f(u)|\ |v|. \\ &\leq \left(\int_\Omega |f(u_n) - f(u)|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |f(u_n) - f(u)|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} c||v||. \end{aligned}$$

Com isso

$$\sup_{||v||\neq 0} \frac{|D_G I_2(u_n)\cdot v - D_G I_2(u)\cdot v|}{||v||} \leq c\left(\int_\Omega |f(u_n) - f(u)|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Portanto de (A.10) concluímos que

$$||D_G I_2(u_n) - D_G I_2(u)||_{H^{-1}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

sempre que $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$. Mostrando que $I_2 \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ e

$$I_2'(u)\cdot v = \int_\Omega f(u)v\ ,\ \forall\ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

■

Segue da Proposição A.6 e Proposição A.7 que o funcional I é de classe $C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ com

$$I'(u)\cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(u)v\ ,\ \forall\ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

A.2 Funcional estudado no capítulo 3

Proposição A.8 *O funcional energia I é de classe $C^1(H_0^1(\Omega))$ com*

$$I'(u)\cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(u)v \ , \ \forall \ u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração.

Para demonstrar esse resultado usaremos fortemente o Teorema F.1(ver Apêndice F).

De maneira análoga ao estudo feito na Proposição A.6 (ver Apêndice A) mostra-se que o funcional

$$\begin{aligned} I_1 : \ H_0^1 \ (\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \ &\longmapsto I_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{2}||u||^2 \end{aligned}$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$I_1'(u)\cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v \ , \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Agora considere o funcional

$$\begin{aligned} I_2 : \ H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \ &\longmapsto I_2(u) = \int_\Omega F(u). \end{aligned}$$

Pelas considerações no inicio desta seção temos que o funcional I_2 está bem definido.

Existência da derivada de Gâteaux

Fixados $u, v \in H_0^1(\Omega)$ arbitrários e considerando $0 < |t| < 1$ defina, para cada $x \in \Omega$, a função

$$\begin{aligned} \rho : \ [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s \ &\longmapsto \rho(s) = F(u(x) + s\ t\ v(x)) \end{aligned}$$

claramente ρ é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} & \rho(1)-\rho(0)=\rho'(\theta)\,(1-0) \\ \Leftrightarrow\ & F(u+tv)-F(u)=f(u+\theta\, t\, v)\, tv \\ \Leftrightarrow\ & \frac{F(u+tv)-F(u)}{t}=f(u+\theta\, t\, v)\, v. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Integrando sobre Ω e passando ao limite em (A.11), quando $t \to 0$, temos que

$$D_G I_2(u)\cdot v=\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(u+tv)-F(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\int_\Omega f(u+\theta\, t\, v)\, v. \tag{A.12}$$

Afirmação 1:

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega f(u+\theta\, t\, v)\, v=\int_\Omega f(u)\, v.$$

Vamos utilizar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para mostra a afirmação acima.

Seja $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ tal que $t_n \to 0$ quando $n \to +\infty$ e defina a seguinte sequência

$$g_n(x)=f(u(x)+\theta\, t_n\, v(x))\, v(x).$$

Segue da continuidade da $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ que

$$g_n(x)\longrightarrow f(u(x))\, v(x)\ \text{ q.t.p em }\ \Omega\ \text{ sempre que }\ n\to+\infty.$$

Vamos mostrar agora que a sequência $g_n(x)$ é dominada por um elemento de $L^1(\Omega)$.

Segue da desigualdade de Trudinger-Moser e desigualdade de Young

$$\begin{aligned} |g_n|=|f(u+\theta\, t_n\, v)\, v| &\le ce^{\alpha|u+t_n\theta v|^2}|v| \\ &\le ce^{\alpha(|u|+|v|)^2}|v| \\ &\le \frac{c}{2}(e^{2\alpha(|u|+|v|)^2}+|v|^2)\in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos a prova da Afirmação 1 e consequentemente a existência da derivada de Gâteaux.

Continuidade da derivada de Gâteaux

Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $||u_n - u|| \to 0$. Pela imersão contínua e do do Teorema D.3, a menos de subsequência, existe $v \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|u_n(x)| \leq v(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega \ \text{ e } \ u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

Daí, pela desigualdade de Trudinger-Moser

$$|f(u_n) - f(u)|^2 \leq c(e^{\alpha v^2} + e^{\alpha u^2}) \leq 2c(e^{2\alpha v^2} + e^{2\alpha u^2}) \in L^1(\Omega).$$

Por outro lado, da continuidade de f, temos que

$$|f(u_n) - f(u)|^2 \to 0 \text{ , quando } \ n \to +\infty.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$|f(u_n) - f(u)|_2^2 = \int_\Omega |f(u_n) - f(u)|^2 \to 0 \ , \text{ quando } \ n \to +\infty.$$

Agora dado $v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, pela desigualdade de Schwarz e imersão contínua, temos

$$\begin{aligned} |I_2'(u_n) \cdot v - I_2'(u) \cdot v| &\leq |f(u_n) - f(u)|_2 \, |v|_2 \\ &\leq |f(u_n) - f(u)|_2 \, k \, ||v||. \end{aligned}$$

Portanto,

$$||I_2'(u_n) - I_2'(u)|| \leq k|f(u_n) - f(u)|_2 \to 0 \ , \text{ quando } \ n \to +\infty.$$

■

Apêndice B

Propriedades do espaço E

Primeiramente mostraremos que E é um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato,

(i) Claramente a função nula pertence a E.

(ii) Seja $u, v \in E$, então

$$(a)^{\frac{1}{2}}u, (a)^{\frac{1}{2}}v \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Daí, pela desigualdade de Hölder, temos

$$auv = [(a)^{\frac{1}{2}}u][(a)^{\frac{1}{2}}v] \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(u+v)^2 = \int_{\mathbb{R}^N} au^2 + \int_{\mathbb{R}^N} 2auv + \int_{\mathbb{R}^N} av^2 < \infty.$$

Logo, $(u+v) \in E$.

(iii) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in E$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(\alpha u)^2 = \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^N} au^2 < \infty, \tag{B.1}$$

ou seja, $\alpha u \in E$.

Com isso concluímos que E é um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Agora para $u, v \in E$ note que a aplicação

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_E : \quad E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle_E = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + auv \end{aligned}$$

define um produto interno em E. De fato, sejam $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. As seguintes propriedades são satisfeitas

- *Positividade:*

  $$\langle u, u \rangle_E = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + au^2 \geq 0 \ , \ \forall \, u \in E.$$

  Além disso,

  $$\begin{aligned} \langle u, u \rangle_E = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + au^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 = 0 \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^N} au^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u = 0 \end{aligned}$$

- *Simetria*

  $$\langle u, v \rangle_E = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + auv = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla u + avu = \langle v, u \rangle_E$$

- *Bilinearidade*

  Segue da linearidade do gradiente e da integral que

  $$\langle u, \alpha v + w \rangle_E \quad = \quad \alpha \langle u, v \rangle_E + \langle u, w \rangle_E$$

  e consequentemente

  $$\langle \alpha u + v, w \rangle_E = \alpha \langle u, w \rangle_E + \langle v, w \rangle_E \, .$$

Logo, $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ define um produto interno em E.

Proposição B.1 *E é um espaço de Hilbert.*

Demonstração.

Pelo feito anteriormente é suficiente mostrarmos que E é Banach.

Por (A_1) podemos fixar $a_0 := \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N} a(x) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} ||u||_E^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)|u|^2) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a_0|u|^2) \\ &\geq \min\{1, a_0\}\ ||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$||u||_E^2 \geq \min\{1, a_0\}\ ||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}. \tag{B.2}$$

Logo $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ continuamente e consequentemente, por $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ ser contínua, temos que a imersão $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ é contínua para $s \in [2, 2^*]$.

Agora considere uma sequência de cauchy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, ou seja,

$$||u_n - u_m||_E \to 0 \ \text{ quando } \ m, n \to +\infty.$$

Então, por (B.2),

$$||u_n - u_m||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0 \ \text{ quando } \ m, n \to +\infty.$$

Sendo $H^1(\mathbb{R}^N)$ completo tem-se $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Mostremos que $u \in E$. De fato, note que

$$||u_n - u||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u)|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^2 \to 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty.$$

Assim quando $n \to +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u)|^2 \to 0 \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^2 \to 0.$$

Como $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então, a menos de subsequência, obtemos

- $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$;
- $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Daí, sendo $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cauchy

$$\begin{aligned} |[a(x)]^{\frac{1}{2}}(u_n - u_m)|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |[a(x)]^{\frac{1}{2}}(u_n - u_m)|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u_m)|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |[a(x)]^{\frac{1}{2}}(u_n - u_m)|^2 \\ &= ||u_n - u_m||_E \to 0 \ \text{ quando } \ n, m \to +\infty. \end{aligned}$$

Sendo $\{[a(x)]^{\frac{1}{2}}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, então podemos extrair uma subsequência tal que

$$|[a(x)]^{\frac{1}{2}}u_{n_{k+1}} - [a(x)]^{\frac{1}{2}}u_{n_k}|_2^2 < \frac{1}{r}. \tag{B.3}$$

Definindo

$$g_j(x) = \sum_{r=1}^{j} |[a(x)]^{\frac{1}{2}}u_{n_{r+1}}(x) - [a(x)]^{\frac{1}{2}}u_{n_r}(x)|$$

e note que $\{g_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente que converge pontualmente para

$$g(x) = \lim_j g_j(x) = \sum_{r=1}^{\infty} |[a(x)]^{\frac{1}{2}}u_{n_{r+1}}(x) - [a(x)]^{\frac{1}{2}}u_{n_r}(x)|.$$

Pela desigualdade de Minkowski e (B.3)

$$|g_j|_2 \leq \sum_{r=1}^{j} |[a(x)]^{\frac{1}{2}}u_{n_{r+1}}(x) - [a(x)]^{\frac{1}{2}}u_{n_r}(x)|_2 \leq \sum_{r=1}^{j} \frac{1}{r} \leq 1.$$

Pelo Teorema da convergência monótona, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g_j(x)|^2 \to \int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^2 \ \text{ quando } \ j \to +\infty$$

e por $|g_j|_2 \leq 1$ temos que $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Agora observe que,

$$|[a(x)]^{\frac{1}{2}}u_{n_{r+j}}(x) - [a(x)]^{\frac{1}{2}}u_n(x)| \leq g_{r+j-1}(x) - g_{r-1}(x).$$

Fazendo $j \to +\infty$,

$$|[a(x)]^{\frac{1}{2}}u_n(x) - [a(x)]^{\frac{1}{2}}u_n(x)| \leq g(x) - g_{r-1}(x) \leq g(x). \tag{B.4}$$

Por outro lado,

$$|[a(x)]^{\frac{1}{2}}u(x) - [a(x)]^{\frac{1}{2}}u_n(x)| \geq |[a(x)]^{\frac{1}{2}}u(x)| - |[a(x)]^{\frac{1}{2}}u_n(x)| \tag{B.5}$$

De (B.4) e (B.5)

$$|[a(x)]^{\frac{1}{2}}u(x)| - |[a(x)]^{\frac{1}{2}}u_n(x)| \leq g(x),$$

ou seja,

$$|[a(x)]^{\frac{1}{2}}u(x)| \leq |[a(x)]^{\frac{1}{2}}u_n(x)| + g(x).$$

Daí,

$$(|[a(x)]^{\frac{1}{2}}u(x)|)^2 \leq |[a(x)]^{\frac{1}{2}}u_n(x)|^2 + 2[a(x)]^{\frac{1}{2}}u_n(x)g(x) + |g(x)|^2.$$

Pelo fato de que $2ab \leq a^2 + b^2$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$a(x)|u(x)|^2 = (|[a(x)]^{\frac{1}{2}}u(x)|)^2 \leq 2[|g(x)|^2 + ([a(x)]^{\frac{1}{2}}u_n(x))^2].$$

Integrando ambos os membros da última estimativa tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u(x)|^2 \leq 2\int_{\mathbb{R}^N} [|g(x)|^2 + ([a(x)]^{\frac{1}{2}}u_n(x))^2] < \infty.$$

Mostrando que $u \in E$, ou seja, E é fechado e por $H^1(\mathbb{R}^N)$ ser Banach tem-se que E é Banach. ∎

Apêndice C

Teoria do Grau em $\mathbb{R}$

Aqui enunciaremos alguns resultados específicos. Para um estudo mais detalhado ver [18] Capítulo 2.

Definição C.1 ***(Grau Topológico em $\mathbb{R}$)***
Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) \neq y$ e $f(b) \neq y$. Definimos o grau topológico de Brouwer da função f no ponto y, e denotamos por $d(f,[a,b],y)$, como sendo

$$d(f,[a,b],y) = \begin{cases} 0, & (y - f(a)) \cdot (y - f(b)) > 0 \\ \\ sgn(y - f(a)), & (y - f(a)) \cdot (y - f(b)) < 0. \end{cases}$$

Proposição C.2 ***(Fórmula do Produto)***
Sejam $f_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tal que $f_1(a) \neq y_1$, $f_1(b) \neq y_1$, $f_2(c) \neq y_2$ e $f_2(d) \neq y_2$. Então

$$d((f_1, f_2), [a,b] \times [c,d], (y_1, y_2)) = d(f_1, [a,b], y_1) \cdot d(f_2, [c,d], y_2).$$

Proposição C.3 ***(Dependência da Fronteira)***
Suponha que $\varphi = \psi$ em $\partial\Omega$ em que $\varphi, \psi \in C(\overline{\Omega}, \Omega)$. Então $\forall b \notin \varphi(\partial\Omega) = \psi(\partial\Omega)$ tem-se que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

Proposição C.4 ***(Existência de Solução)***
Seja $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \Omega)$. Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que

$$\varphi(x_0) = b.$$

Apêndice D

Espaços $L^p(\Omega)$

Teorema D.1 ***(Convergência Dominada de Lebesgue)***
Sejam Ω um conjunto mensurável de $\mathbb{R}^N$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que

(i) $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ *q.t.p em* Ω*;*

(ii) Existe $h \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|u_n(x)| \leq h(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Então,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n(x)\, dx = \int_\Omega u(x)\, dx.$$

Demonstração. Ver [3]. ■

Teorema D.2 ***(Teorema da convergência dominada generalizada de Lebesgue)***
Sejam $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções mensuráveis e* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ *satisfazendo*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω*;*

(ii) $g_n(x) \to g(x)$ *q.t.p em* Ω*, com* $g \in L^1(\Omega)$*;*

(iii) $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ *q.t.p em* Ω*,* $\forall\, n \in \mathbb{N}$*;*

(iv) $|g_n - g|_1 \to 0$*, quando* $n \to +\infty$.

Então, $f \in L^1(\Omega)$ *e* $|f_n - f|_1 \to 0$*, quando* $n \to +\infty$.

Demonstração. Ver [26]. ■

Teorema D.3 ***(Vainberg)***
Sejam (u_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $u \in L^p(\Omega)$ *tal que* $||u_n - u||_p \longrightarrow 0$ *para* $n \longrightarrow +\infty$. *Então, a menos de subsequência, existe uma função* $h \in L^p(\Omega)$ *tal que*

(a) $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ *q.t.p de* Ω*;*

(b) $|u_n(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ *q.t.p de* Ω.

Demonstração.

Ver [3]. ■

Lema D.4 *Sejam* $1 < p < \infty$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* $L^p(\Omega)$ *e* $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *q.t.p em* Ω, *então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Ver [18]. ■

Lema D.5 *Sejam* $p > 1$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ *e* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{p'}(\Omega)$ *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Suponha que*

$$\begin{aligned} &f_n \longrightarrow f \ \ em \ \ L^p(\Omega) \ \ e \\ &g_n \rightharpoonup g \ \ em \ \ L^{p'}(\Omega) \end{aligned}$$

para algum $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^{p'}(\Omega)$. *Então*

$$\int_\Omega f_n g_n \longrightarrow \int_\Omega fg.$$

Demonstração. Ver [18]. ■

Proposição D.6 ***(Desigualdade de Interpolação)***
Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, *então* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$. *Além disso,*

$$|u|_r \leq |u|_p^\theta \ |u|_q^{1-\theta}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ *verifica* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

Demonstração. Ver [23]. ■

Lema D.7 *Para cada $s > 2$, seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^s(\Omega)$ uma sequência de funções limitada. Se existir $s_0 > 2$ tal que*

$$|u_n|_{s_0} \to 0 \ \ \textit{quando} \ \ n \to +\infty.$$

Então,

$$|u_n|_s \to 0 \ \ \textit{quando} \ \ n \to +\infty$$

para todo $s > 2$.

Demonstração.

Primeiramente consideremos o caso em que $s > s_0 > 2$. Fixando $\tilde{t} > s$, pela desigualdade de interpolação com $\alpha \in (0,1)$, temos que

$$|u_n|_s \leq |u_n|_{s_0}^{\alpha} |u_n|_{\tilde{t}}^{1-\alpha}.$$

Por outro lado, da hipótese, existe $K_{\tilde{t}} > 0$ tal que

$$|u_n|_{\tilde{t}}^{\alpha} \leq K_{\tilde{t}} \ , \ \forall \, n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$|u_n|_s \leq |u_n|_{s_0}^{\alpha} (K_{\tilde{t}})^{1-\alpha} \to 0 \ \ \text{quando} \ \ n \to +\infty.$$

Agora consideremos o caso em que $s_0 > s > 2$. Fixando $2 < \bar{t} < s$, e usando novamente a desigualdade de interpolação com $\alpha \in (0,1)$, segue que

$$|u_n|_s \leq |u_n|_{\bar{t}}^{\alpha} |u_n|_{s_0}^{1-\alpha}.$$

Além disso, por hipótese, existe $K_{\bar{t}} > 0$ tal que

$$|u_n|_{\bar{t}} \leq K_{\bar{t}} \ , \ \forall \, n \in \mathbb{N}$$

e com isso concluímos que

$$|u_n|_s \leq (K_{\bar{t}})^{\alpha} |u_n|_{s_0}^{1-\alpha} \to 0 \ \ \text{quando} \ \ n \to +\infty.$$

■

Lema D.8 ***(P.L. Lions, 1984)***
Seja $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^q \to 0\ , \quad \textit{quando} \;\; n \to +\infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

Demonstração. Ver [34] ■

Teorema D.9 *Sejam $R > 0$, $B_R = B_R(0)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{B_R} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)dx.$$

Demonstração.

Considerando a aplicação $\chi_{B_R} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_{B_R} = \begin{cases} 1, \text{se } x \in B_R \\ 0, \text{se } x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R. \end{cases}$$

Então, $g\chi_{B_R}$ é integrável para todo $R > 0$ e

$$\int_{B_R} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g\chi_{B_R}(x)dx \tag{D.1}$$

Dado $x \in \mathbb{R}^N$, escolha $R_0 > 0$ de modo que $|x| \leq R_0$. Desta forma para $R \geq R_0$ temos que $x \in B_R$ e consequentemente $g(x)\chi_{B_R}(x) = g(x)$ o que implica

$$g(x)\chi_{B_R}(x) \to g(x) \;\text{ q.t.p em }\; \mathbb{R}^N \;\text{ quando }\; R \to +\infty.$$

Além disso,

$$|g(x)\chi_{B_R}(x)| \leq |g(x)| \;\text{ q.t.p em }\; \mathbb{R}^N \;\text{ e }\; \int_{\mathbb{R}^N} g(x)dx < \infty.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x)\chi_{B_R}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)dx. \tag{D.2}$$

De (D.1) e (D.2) segue que

$$\lim_{R\to+\infty}\int g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)dx.$$

■

Lema D.10 ***(Brézis-Lieb, 1983)***
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Se

- *$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^p(\Omega)$;*
- *$u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω,*

então $u \in L^p(\Omega)$ e

$$|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p = |u|_p^p + o_n(1).$$

Demonstração. Ver [34]. ■

Apêndice E

Espaço de Sobolev

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$.

Definição E.1 *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c|c} u \in L^p(\Omega) & \begin{array}{c} \exists\, g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \ \ tal\ que \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \ \forall\, \varphi \in C^\infty(\Omega),\ \forall\, i = 1, 2, ..., N \end{array} \end{array} \right\}.$$

Denotamos o conjunto

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

e mostra-se que a aplicação

$$\begin{array}{rll} N: & H^1(\Omega) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & v & \mapsto N(v) = \left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 + (v)^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

define uma norma em $H^1(\Omega)$ que por sua vez é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \nabla u \nabla v + uv\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso definimos o espaço $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{H^1(\Omega)}}$.

Teoremas de Imersões

Imersões contínuas

Teorema E.2 *Seja Ω um domínio regular, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, as imersões abaixo são contínuas.*

(i) Se $m < \dfrac{N}{p}$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)\ , q \in \left[p, \frac{Np}{N-mp}\right];$$

(ii) Se $m = \dfrac{N}{p}$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)\ ,\ \textit{para}\ \ q \in [p, +\infty)\ \ \textit{se}\ \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0;$$

(iii) Se $m > \dfrac{N}{p}$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega);$$

(iv) Se $m - 1 < \dfrac{N}{p} < m$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega)\ ,\ \alpha \in \left(0, m - \frac{N}{p}\right).$$

onde $C_B^j(\Omega)$ é o subespaço de $C^j(\Omega)$ formado pelas funções que juntamente com suas derivadas até a ordem j são limitadas em Ω.

Demonstração. [3] ■

Portanto, se $N \geq 3$, é contínua a seguinte imersão

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)\ ,\ \forall\ s \in [2, 2^*]\ \ \text{,onde}\ \ 2^* = \frac{2N}{N-2}.$$

Consequentemente

$$H_0^1(\Omega) \overset{Cont.}{\hookrightarrow} L^s(\Omega)\ ,\ \forall\ s \in [2, 2^*].$$

Imersões de Rellich–Kondrachov

Teorema E.3 *Sejam Ω um domínio regular e **limitado**, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então as seguintes imersões são compactas*

(i) Se $m < \dfrac{N}{p}$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega) \ , q \in [1, 2^*] \, ;$$

(ii) Se $m = \dfrac{N}{p}$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega) \ , \ \textit{para} \ \ q \in [1, +\infty) \ \ \textit{se} \ \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0;$$

(iii) Se $m > \dfrac{N}{p}$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega);$$

(iv) Se $m - 1 < \dfrac{N}{p} < m$;

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega) \ , \ \alpha \in \left(0, m - \frac{N}{p}\right).$$

Demonstração. ([3]) ■

Portanto se $N \geq 3$ e Ω é limitado, então a seguinte imersão é compacta

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega) \ , \ \forall \ s \in [1, 2^*] \, .$$

Se $N = 1$ ou $N = 2$, então

$$H^1(\Omega) \overset{Comp.}{\hookrightarrow} L^s(\Omega) \ , \ \forall \ s \in [1, +\infty).$$

Consequentemente

$$H^1_0(\Omega) \overset{Comp.}{\hookrightarrow} L^s(\Omega) \ , \ \forall \ s \in [1, 2^*] \, .$$

Se $N = 1$ ou $N = 2$, então

$$H^1_0(\Omega) \overset{Comp.}{\hookrightarrow} L^s(\Omega) \ , \ \forall \ s \in [1, +\infty).$$

Proposição E.4 *Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$, então $u^+, u^-, |u| \in W^{1,2}(\Omega)$. Além disso,*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & , \ se \ \ u > 0 \\ 0 & , \ se \ \ u \leq 0 \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & , \ se \ \ u \geq 0 \\ \nabla u & , \ se \ \ u < 0 \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u & , \ se \ \ u > 0 \\ 0 & , \ se \ \ u = 0 \\ -\nabla u & , \ se \ \ u < 0 \end{cases}$$

Apêndice F

Outros Resultados

Teorema F.1 *Sejam X um espaço de Banach, E um aberto de X e $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Se J possui Derivada de Gâteaux para todo $u \in E$ e se, além disso, $D_G J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínuo em E, então $J \in C^1(E, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Dado $u \in E$, sendo E um aberto, $u + tv \in E$ para algum $v \in E$ e para todo $t \in (0, 1)$. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rll} f: & [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto f(t) = J(u + tv) \end{array}$$

Por hipótese J tem derivada de Gâteaux em todo ponto de E, então f é derivável em $(0, 1)$ e $f'(t) = D_G J(u + tv)v$. Segue do Teorema do Valor Médio que existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(t_0)$, ou seja,

$$J(u + v) - J(u) = DJ(u + t_0 v)v \tag{F.1}$$

Sendo DJ_G contínuo temos que

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ , } \exists \delta > 0 \text{ tal que } ||v||_X < \delta \Longrightarrow ||D_G J(u + t_0 v) - D_G J(u)||_{X'} < \varepsilon \tag{F.2}$$

De (F.1), (F.2) e $||v||_X < \delta$ temos

$$
\begin{aligned}
|J(u+v) - J(u) - D_G J(u)v| &= |D_G J(u+t_0 v)v - D_G J(u)v| \\
&\leq ||D_G J(u+t_0 v) - D_G J(u)||_{X'} ||v||_X \\
&< \varepsilon ||v||_X
\end{aligned}
$$

donde segue que,

$$D_G J(u)v = \lim_{||v|| \longrightarrow 0} \frac{J(u+v) - J(u)}{||v||_X}$$

e com isso mostrando que a derivada de Fréchet existe e $J'(u) = D_G J(u)$. Sendo $D_G J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuo tem-se $J' : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínuo. ■

Teorema F.2 ***(Princípio do Máximo)***
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio e $u \in C^2(\Omega)$ tal que

$$\Delta u + au \geq 0 \; (\leq 0)$$

com $a(x) \leq 0$ em Ω. Se u atinge um máximo positivo (mínimo negativo) M em Ω, então $u \equiv M$.

Demonstração. Ver [25]. ■

Teorema F.3 ***(Teorema de Miranda, 1940)***
Sejam $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| \leq R \; , \; i = 1, 2, ..., N\}$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ uma função contínua satisfazendo

(i) $f_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, R, x_{i+1}, ..., x_N) \leq 0 \; , \; \forall \, i \in \{1, 2, ..., N\}$*;*

(ii) $f_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, -R, x_{i+1}, ..., x_N) \geq 0 \; , \; \forall \, i \in \{1, 2, ..., N\}$*.*

Então, existe $\overline{x} \in \Omega$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.

Demonstração. ver [29]. ■

Teorema F.4 *Seja X um espaço de Banach real e suponha que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ é um funcional satisfazendo a condição $(PS)_c$. Se $c \in \mathbb{R}$, $\overline{\varepsilon} > 0$ e V é uma vizinhança de $K_c = \{u \in X : I'(u) = 0 \ \text{ e } \ I(u) = c\}$, então existem $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tais que, para quaisquer $t \in [0,1]$, vale*

(i) $\eta(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$, *se* $u \notin I^{-1}([c - \overline{\varepsilon}, c + \overline{\varepsilon}])$;

(iii) $I(\eta(t, u)) \leq I(u)$;

(iv) $\eta(1, I^{c+\varepsilon} \backslash V) \subset I^{c-\varepsilon}$;

(v) $\eta(t, \cdot) : X \to X$ *é um homeomorfismo;*

(vi) *Se I é par então* $\eta(t, -u) = -\eta(t, u)$.

Demonstração. Ver [27]. ■

Proposição F.5 *Sejam K um compacto e $A, B \subset K$ subconjuntos fechados. Se nenhuma componente conexa de K intersecta, simultaneamente, os subconjuntos A e B, então existem conjuntos compactos e disjuntos contendo A e B, digamos K_A e K_B, tais que $K = K_A \cup K_B$.*

Demonstração. ver [33] pag. 12, resultado (9.3). ■

Teorema F.6 *Sejam C, X subconjuntos de um espaço métrico M. Se C é conexo e tem pontos em comum com X e com $M \backslash X$, então algum ponto de C pertence a fronteira de X.*

Demonstração. ver [19]. ■

Teorema F.7 ***(Teorema do Valor Médio)***

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Se f é contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(a) - f(b) = f'(c) \cdot (b - a)$$

Demonstração. ver [20]. ■

Referências Bibliográficas

[1] Alves, C. O.; Pereira, D.S. *Existence and nonexistence of least energy nodal solutions for a class of elliptic problem in* $\mathbb{R}^2$, to appear in Topol. Methods Nonlinear Anal.

[2] Adachi. S and K. Tanaka, *Trudinger type inequalities in* $\mathbb{R}^N$ *and their best expoents*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 2051-1057.

[3] Brézis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[4] Brezis. H and Nirenberg. L, *Positive Solution of nonlinear elliptic equation involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure. Appl. Math. 36 (1983). 437-477.

[5] Bartsch, T. Weth, T. Willem, M. *Partial symmetry of least energy nodal solutions to some variational problems.* Journal D'Analise Mathematique, Vol. 96 (2005).

[6] Bartsch, T. Liu, Z. Weth, T. *Sign Changing Solution of Superlinear Schrödinger Equations*, Comm. PDE 29 (2004), 25–42.

[7] Bartsch. T, Wang. Z.Q, Willem. M. The Dirichlet problem for superlinear elliptic equations. In: Chipot M, QuittnerEds P, eds. Handbook of

Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations, Vol 2. Amsterdam: Elsevier, 2005, 1-55.

[8] Bernhard. R, *A sharp Trudinger - Moser type inequality for unbounded domains in* $\mathbb{R}^2$, Journal of Functional Analysis 219 (2005) 340 – 367.

[9] Cerami, G.; Solimini, S.; Struwe, M. *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents*, J. Funct. Anal. 69 3 (1986), 289-306.

[10] Cao. D. M, *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical expoent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Partial Diff. Eq. 17 (1992), 407-435.

[11] Capozzi. A, Fortunato. D, and Palmieri. G, *An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré (Anal. Nonlinkaire), in press.

[12] Chang. K. C, *Infinite-dimensional Moser Theory and Multiple Solution Problems.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, No 6. Boston: Birkhäuser, 1993.

[13] Conti. M, S. Terracini, G. Verzini. Nehari's problem and competing species systems. Ann Inst H Poincare Anal Non Linéaire, 2002, 19: 871888.

[14] Dancer. E, Y. Du. Competing species equations with diffusion, large interaction, and jumping nonlinearities. J Diferential Equations, 1994, 114: 434475.

[15] Deimling. K, *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, Lecture Notes in Math., Vol. 596, Springer-Verlag, New York, 1977.

[16] do Ó, J. M.; Medeiros, E. S.: Severo, U. B. *A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two.* J. Math. Anal. Appl. 345, (2008) 286-304.

[17] Hofer. H, *Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces*, Math. Ann. 261 (1982), 493-514.

[18] Kavian, O. *Introduction à la Théorie des Points Critiques et applications aux Problèmes Elliptiques.* Springer Verlag, Nancy, 1993.

[19] Lima, E. L. *Espaços Métricos.* 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1989.

[20] Lima, E. L. Curso de Análise. Vol. 1, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[21] Liu, Z.L., and Sun, J.X., *Invariant sets of descending flow in critical point theory with applications to nonlinear differential equations.* J. Differential Equations 172 (2001) 257-299.

[22] Moser. J, *A sharp form of on inequality by N.* Trudinger, Ind. Univ. Math. J. 30 (1967), 473-484.

[23] Medeiros, L. A., Miranda, M. M. *Espaço de Sobolev: "Iniciação ao Problemas Elípticos não Homogêneo.* Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.

[24] Pohozaev. S. I,: *The Sobolev embedding in the case $pl = n$.* Proceedings of the Technical Scientific Conference on Advances of Scientific Research 1964-1965. Mathematics Section, 158-170, Moskov. Energet. Inst., Moscow, 1965.

[25] Protter, H. Murray., Weinberg. Hans F. *Maximum Principle in Diffrential Equation*, Springer-Verlag New York Inc. 1984.

[26] Royden, H.L. *Real Analysis*, 2 ed. The Macmillan Company, 1988.

[27] Rabinowitz. P. H, *Variational methods for nonlinear eigenvalue problems*, in "Eigenvalues in Nonlinear Problems" (G. Prodi, Ed.), pp. 141-195, CIME, 1974.

[28] Rabinowitz. P. H, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Diferential Equations*. CBMS Conf Ser in Math, No 65. Providence: Amer Math Soc, 1986.

[29] Schäfer U., A *fixed point theorem based on Miranda*, Fixed Point Th. Appl (2007), doi:10.1155/2007/78706.

[30] Struwe, M., *Variational Methods - Applications to Nonlinear Partial Diferential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer, 4th Edition, 2008.

[31] Samuays M.A.,*O Problema de Brezis-Nirenberg*, Curitiba: UFPR, 2011 Dissertação.

[32] Trudinger. N. S, *On imbeddings into orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. 75 (1980), 59-77.

[33] Whyburn, G. T., *Topological Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1958.

[34] Willem, M. Minimax Theorems, Progress in nonlinear differential equations and their applications; v. 24 Birkhäuser, 1996.

[35] Zou, W. Sign-Changing Critical Point Theory. Springer, Berlin, 2008